

۶۶۷۵

CHECKED. 1961

۵۵

Checked 1965

Checked 1969.

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے جن کو حقوق
کاپی رائٹ حاصل ہیں، طبع کی گئی ہے +

P. 22 to P. 53

P. 97 to P. 122.

فہرست مضامین

علم شلت تحلیلی (حصہ دوم)

صفحہ نمبر	مضمون	پر
۱	سلسلہ قوت نما اور لوکارتی سلسلے	۱
۱۰	اساس جو پر کے لوکارتم	
۱۶	دو ضروری انتہائی قیمتیں	
۲۲	مقادیر ملتف	۲
۲۴	ڈی مائیرے کا مسئلہ	
۲۴	ملتف مقادیر کے لئے مسئلہ شنائی	
۲۵	جب ن طہ جم ن طہ اور مس ن طہ کی تفصیلیں	۳
۵۴	جب ع اور جم ع کی تفصیلیں ع کی صعودی قوتوں کے ہیں	
۵۴	چھوٹے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام	
۵۸	کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت	۴
۶۱	بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا	۴
۷۵	جم ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے اضعاغ کی جیوب التمام اور جیوب میں	۴
۸۳	جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلیں جب طہ اور جم طہ کی صعودی اور نزولی قوتوں کے سلسلوں میں	

صفحہ	مضمون	صفحہ
۹۸	مقادیر ملتف کے لئے سلسلہ قوت نما	۵
۱۰۱	ملٹ زادیوں کے لئے تفاعیل مستدیرہ	
۱۰۲	آئیلر کی قوت نامیتیں	
۱۰۵	زائدی تفاعیل	
۱۱۵	مقلوب و مستدیر تفاعل	
۱۱۷	مقلوب زائدی تفاعیل	
۱۲۲	ملتف مقادیر کے نوکار تم	۶
۱۳۱	لا کی تعریف جب لا اور لا ملتف ہوں	
۱۳۸	گرگیوری کا سلسلہ	۷
۱۴۱	۲۱ کی قیمت	
۱۴۶	سلسلوں کو جمع کرنا	۸
۱۶۲	سلسلوں میں پھیلانا (تفصیلیں)	
۱۷۰	لا ^۱ و جم ^۲ ن ط + ۱ کے اجزائے ضربی	۹
۱۷۷	لا ^۱ - ۱ اور لا ^۲ + ۱ کے اجزائے ضربی	
۱۸۸	جب ط اور جم ط کی تحلیل اجزائے ضربی میں	
۱۹۴	جنبر ط اور جنبر ط کے اجزائے ضربی لاتنا ہی سلسلہ میں	
۲۰۷	اصول اجزائے تناسب	۱۰
۲۱۷	اغلاط مشاہدہ	۱۱
۲۲۸	متفرق مسائل	۱۲

صفحہ نمبر	مضمون	صفحہ نمبر
۲۲۸	مساوات و ردی سوم کا اعلیٰ	
۲۳۰	اعظم اور اقل قیمتیں	
۲۳۵	مقادیر ملحقہ کی ہندسی تعبیر	
۲۴۰	تفرق مثالیں	
۲۴۲	جوابات	

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

حصہ دوم

علم مثلث

باب اوّل

سلسلہ قوت نما اور لوکار تھی سلسلہ

۱۔ باب ہذا میں ہم جملہ $\frac{1}{n}$ کی تفصیل لا کی قوتوں میں معلوم کریں گے جہاں $\frac{1}{n}$ اور لا سے حقیقی مقدار پر مراد ہیں۔ اور نیز لوکار $(1 + \frac{1}{n})$ کی تفصیل پانچ کرینگے جہاں لا حقیقی ہے اور ایک سے کم ہے اور $\frac{1}{n}$ ایک ایسی مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔ جسکی تعریف آگے چل کر کیجائیگی۔

۲۔ مقدار $(1 + \frac{1}{n})$ کی قیمت معلوم کرو جب n

لا انتہا بڑھ جائے اور حقیقی ہو۔

چونکہ $\frac{1}{n} > 1$ اسلئے مسئلہ ثنائی سے

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{n^3} + \dots \\
 & \quad + \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \dots \\
 & \quad + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{1}{n} \times n + 1 + 1 = \\
 & \quad \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{3}{n})}{3!} + \dots
 \end{aligned}$$

یہ سلسلہ n کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے۔ خواہ یہ قیمتیں
 بڑی یا چھٹی ہی بڑی کیوں نہ ہوں۔ پس اگر n کو غیر متناہی بنا دیا
 جائے تو بائیں جانب کا رکن

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \text{ "تالا متناہی"}$$

اسلئے جب n غمہ متناہی ہو تو جملہ $(1 + \frac{1}{n})^n$ کی انتہائی قیمت
 ذیل کے سلسلہ حاصل جمع سے تعبیر ہوگی۔

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \text{ "تالا متناہی"}$$

اس سلسلہ کے حاصل جمع کو ہمیشہ علامت 'e' سے تعبیر کرتے ہیں

$$\text{اسلئے نہا } \infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

اس جگہ نہا ∞ سے مراد $(1 + \frac{1}{n})^n$ کی انتہائی قیمت ہے

جب n لانتہا بڑھ جائے
 نتیجہ صریح - اگر ہم n کی بجائے $\frac{1}{m}$ لکھیں تو ظاہر ہے کہ جب
 n مائل بہ لانتہا ہی ہو تو m صفر کے نہایت قریب ہو جائیگا اس لئے

$$m = (m+1)^{\frac{1}{n}} = \text{نہا} \leftarrow n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = n$$

۳ - مقدار 'و' ایک تنہا ہی یا محدود بہ مقدار ہے -

$$\text{چونکہ } \frac{1}{3} > \frac{1}{2 \times 2} > \frac{1}{4}$$

$$\text{اور } \frac{1}{4} > \frac{1}{2 \times 2 \times 2} > \frac{1}{8}$$

$$\text{اسلئے } 1 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 + 1 \dots \dots \dots \text{تالا تنہا ہی}$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} >$$

$$2 + 1 > 3 \text{ یعنی}$$

نیز صریحاً $2 < 3$

اسلئے 'و' کی قیمت '۲' اور '۳' کے درمیان ہوگی
 اگر ہم سلسلہ متذکرہ بالا کی رقوم کی کافی تعداد لیں تو انکو
 جمع کرنے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$2.5 < 1.82818285 \dots = 3$$

۳ - مقدار 'و' تنہا ہی ہے

اگر ممکن ہو تو فرض کر دو کہ کسی کسر $\frac{1}{n}$ کے مساوی ہے - جہاں

ن اور ق کوئی صحیح اعداد ہیں۔

$$\text{تب } \frac{1}{1+ق} + \frac{1}{ق} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{ن}{ق}$$

$$(1) \dots + \frac{1}{ق+2} +$$

مساوات بالا کے دونوں طرف $ق$ سے ضرب دے دو۔ اس طرح

سے سلسلہ (۱) کی سب رقمیں صحیح اعداد بن جائیں گی بجز $\frac{ق}{ق+1}$ کے اور اسکے بعد کی رقوم کے۔

$$\text{اسلئے } ن \times 1 - ق = \text{ایک صحیح عدد} + \frac{ق}{ق+1} + \frac{ق}{ق+2} +$$

$$\dots + \frac{ق}{ق+3} +$$

$$\frac{1}{ق+4} + \dots + \frac{1}{ق+n}$$

$$\frac{1}{ق+5} + \dots + \frac{1}{ق+n}$$

$$\text{یعنی ایک صحیح عدد} = \frac{1}{ق+1} + \frac{1}{(ق+1)(ق+2)}$$

$$(2) \dots + \frac{1}{(ق+2)(ق+3)} +$$

لیکن اس مساوات کی بائیں جانب کا رکن $\frac{1}{ق+1} <$ اور

$$> \frac{1}{ق+1} + \frac{1}{(ق+1)(ق+2)} + \dots$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{ق+1} + \frac{1}{(ق+1)(ق+2)} > \left(\frac{1}{ق+1} - 1 \right) \times \frac{1}{ق}$$

یعنی $\frac{1}{ق} > \frac{1}{ق}$ لہذا مساوات (۲) کی بائیں جانب کے رکن کی قیمت $\frac{1}{ق}$ اور $\frac{1}{ق+۱}$ کے درمیان واقع ہے یعنی ایک کسر ہے اور اسلئے

بائیں جانب کے رکن کے مساوی نہیں ہو سکتی۔
اس طرح سے 'و' کو متوافق فرض کرنا غلط ثابت ہوا۔
لہذا 'و' ایک متباہن مقدار ہے۔

۵۔ سلسلہ قوت نما، اگر لاء حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

$$1 = 1 + 1 + 1 + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$1 = 1 + 1 + 1 + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

اگر لاء ایک سے بڑا ہو تو

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{ن} \right)^ن \right\} = \left(1 + \frac{1}{ن} \right)^ن$$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \frac{1}{ن} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \times \frac{1}{ن} + \dots \\ &+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{1}{ن} + \dots \\ &+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{1}{ن} + \dots \end{aligned}$$

اس جملہ میں فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھ جاتا ہے
تب دائیں جانب کا رکن حسب دفعہ (۲) فو^۱ بن جاتا
ہے اور بائیں جانب کا رکن
 $۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \dots$ ہو جاتا ہے

اسلئے

$$فو^۱ = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \dots \text{ تا لا انتہا ہی} \dots (۱)$$

فرض کرو کہ ۱ = فو^۲ یعنی ج = لوک و ۱
پس سلسلہ (۱) میں لا کی بجائے ج لا لکھنے سے

$$۱ = فو^۲ = ۱ + ج لا + \frac{ج لا^۲}{۲} + \frac{ج لا^۳}{۳} + \dots \text{ تا لا انتہا ہی}$$

$$\therefore ۱ = ۱ + لا لوک و ۱ + \frac{لا^۲}{۲} (لوک و ۱)^۲$$

$$+ \frac{ج لا^۳}{۳} (لوک و ۱)^۳ + \dots \text{ تا لا انتہا ہی} \dots (۲)$$

۶۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے (دیکھو سی سمتھ
الجبرا دفعہ ۲۷۸) کہ دفعہ ماقبل کا سلسلہ (۱) اور بنابرین
سلسلہ (۲) ہر دو لا کی حقیقی قیمتوں کے واسطے مستحق سلسلے

ہیں۔
۷۔ مشق ۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲} (۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \dots$ تا لا انتہا ہی

دفعہ ۵ کی مساوات (۱) میں لا کی بجائے بالترتیب ۱ اور

۱- رکھئے سے

$$\begin{aligned} \text{قوا} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \text{تالا تنا ہی} \\ \text{قوا} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \text{تالا تنا ہی} \end{aligned}$$

پس عمل تفریق سے

$$\text{قوا} - \text{قوا} = 2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots)$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2} (\text{قوا}) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \text{تالا تنا ہی}$$

مشق ۲ - سلسلہ ذیل کو جمع کر دو۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \text{تالا تنا ہی}$$

$$n \text{ ویں رقم} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots = \frac{(1-n)}{n} + \frac{2}{n}$$

$$\left[\frac{2}{1-n} + \frac{1}{n} \right] \frac{1}{2} = \left[\frac{2 + (1-n)}{1-n} \right] \frac{1}{2} = \frac{1+n}{1-n} \frac{1}{2} =$$

بشرطیکہ $n < 2$

$$\left[\frac{2}{2-n} + \frac{1}{3-n} \right] \frac{1}{2} = \text{اسی طرح سے } (1-n) \text{ ویں رقم}$$

$$\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2} = \dots \text{چوتھی رقم}$$

$$\left[\frac{2}{2} + \frac{1}{1} \right] \frac{1}{2} = \dots \text{تیسری رقم}$$

$$\frac{1}{p} = \text{دوسری رقم} \left[\frac{2}{p} + 1 \right]$$

$$\frac{1}{p} = \text{پہلی رقم} \left[\frac{2}{p} \right]$$

پس کل جمع سے سلسلہ مذکور

$$\frac{1}{p} = \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right] \text{تلا تباہی}$$

$$2 \times \frac{1}{p} + \left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right] \text{تلا تباہی}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

۸۔ لوکارتی سلسلہ۔ اگر واقعی ہو اور تعداد $a > 1$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } (a+1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \text{تلا تباہی}$$

دفعہ ۱ میں فرض کرو کہ

$$a + 1 = 1$$

$$\text{تب } (a+1) = 1 + \text{لوک } (a+1)$$

$$+ \frac{1}{p} + \left\{ \text{لوک } (a+1) \right\} + \dots (1)$$

لیکن واقعی ہے اور تعداد ایک سے کم ہے

$$(1+a)^3 = 1 + 3a + \frac{3 \cdot 2}{2!} a^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} a^3 + \dots + a^3 \quad (2)$$

چونکہ ما تعداد کم ہے ایک سے، اسلئے

مساوات (1) اور مساوات (2) دونوں میں بائیں جانب کے سلسلے باہم مساوی ہونگے۔ اور نیز مستحق ہونگے۔ علاوہ ازیں یہ بھی آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر (2) میں بائیں جانب کے سلسلہ کو لاکھ قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔ لہذا ہم لاکھ کی برابر قوتوں والی رقم کے سروں کو مساوی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے

$$\text{لوک } (1+a)^3 = 1 + 3a + \frac{3 \cdot 2}{2 \times 1} a^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \times 2 \times 1} a^3 + \dots + a^3$$

یعنی لوک (1+a) = 1 + 3a + \frac{3 \cdot 2}{2 \times 1} a^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \times 2 \times 1} a^3 + \dots + a^3
اگر 1 = 1 تو ذنہ ما قبل کا سلسلہ

اگر 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots + \dots تا لامتناہی (جو صریحاً مستحق ہے)

لہذا یہ سلسلہ ما کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو 1 اور 1 کے درمیان ہوں درست ہوگا اور علاوہ ازیں اس حالت میں بھی درست رہے گا جب 1 = 1

لیکن اگر ما = ۱ - تو یہ سلسلہ دائیں جانب کے رکن کا مترادف نہ ہوگا۔

۱۰۔ اساس قوپر کے لوکار تم معلوم کرو۔

مندرجہ بالا لوکار تمی سلسلہ میں فرض کرو کہ ما = تب

$$\text{لوک } ۲ = ۱ - \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} - \frac{1}{۴} + \dots \dots \dots \text{تالانتنا ہی} \dots (۱)$$

فرض کرو کہ ما = $\frac{1}{۲}$ تب

$$\text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲ = \text{لوک } ۲ = \frac{۳}{۲} = \text{لوک } ۲ \left(۱ + \frac{1}{۲} \right)$$

$$= \frac{1}{۲} - \frac{1}{۲} \times \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۳} - \frac{1}{۴} \times \frac{1}{۴} + \dots \dots \dots (۲)$$

فرض کرو کہ ما = $\frac{1}{۳}$ تب

$$\text{لوک } ۴ - \text{لوک } ۳ = \text{لوک } ۳ = ۳ = \text{لوک } ۳ \left(۱ + \frac{1}{۳} \right)$$

$$= \frac{1}{۳} - \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} \times \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} \times \frac{1}{۵} + \dots \dots \dots (۳)$$

اگر ان مساواتوں کی رقوم کی کافی تعداد لی جائے تو ہم لوک ۲، لوک ۳، لوک ۴ کی قیمتیں محسوب کر سکتے ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ کافی درجہ تک درست نتائج حاصل کرنے کے واسطے سلسلہ بالا میں بہت زیادہ رقوم لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ اسلئے ہم ایک زیادہ سہولت بخش سلسلہ معلوم کرتے ہیں۔

۱۱۔ دفعہ ۸ کی رو سے

لوک و (۱+ما) = ما - $\frac{ما}{۲}$ + $\frac{ما}{۳}$ - $\frac{ما}{۴}$ + (۱)
ما کی علامت تبدیل کرنے سے

لوک و (۱-ما) = -ما - $\frac{ما}{۲}$ - $\frac{ما}{۳}$ - $\frac{ما}{۴}$ - (۲)
ان دونوں سلسلوں کے درست ہونیکے لئے لازمی ہے -
کہ ما کی قیمت تعداداً ایک سے کم ہو -
عمل تفریق سے

$$\text{لوک و (۱+ما) - لوک و (۱-ما) = لوک و } \frac{ما+۱}{ما-۱}$$

$$(۳) \dots\dots\dots [۲ = \dots\dots\dots + \frac{ما}{۵} + \frac{ما}{۳} + \dots\dots\dots]$$

فرض کرو کہ ما = $\frac{م-ن}{م+ن}$ جہاں م اور ن دونوں صحیح

اعداد ہیں

$$\text{اور } م < ن \quad \text{پس } \frac{م}{ن} = \frac{ما+۱}{ما-۱}$$

تب مساوات (۳) حسب ذیل ہو جائے گی

$$\text{لوک و } \frac{م}{ن} = \left[۲ = \left(\frac{م-ن}{م+ن} \right) + \frac{۱}{۳} \left(\frac{م-ن}{م+ن} \right) + \dots\dots\dots \right]$$

$$(۴) \dots\dots\dots + \frac{۱}{۵} \left(\frac{م-ن}{م+ن} \right) + \dots\dots\dots$$

مساوات (۴) میں م کی بجائے ۲ اور ن کی بجائے ۱
 لکھنے سے لوک ۲ اسانی سے حاصل ہو سکتا ہے اور م کی
 بجائے ۳ اور ن کی بجائے ۲ لکھنے سے [لوک ۳
 - لوک ۲] معلوم ہو سکتا ہے

اور اس سے لوک ۳ کی قیمت نکل سکتی ہے -
 اسی عمل سے کسی اور عدد کا لوکار تم اساس نو پر معلوم ہو سکتا ہے

۱۲۔ اساس ۱۰ پر کے لوکار تم معلوم کرو

گزشتہ دفعہ کے لوکار تم اساس تو پر نکالے گئے ہیں ان کو بالعموم پیری
 یا طبعی لوکار تم کے نام سے موسوم کرتے ہیں ہم ان لوکار تموں کو
 اساس ۱۰ پر کے لوکار تموں میں منتقل کر سکتے ہیں -
 اگر ع کوئی عدد ہو تو دفعہ ۱۵۳ (حصہ اول) کی رو سے

$$\text{لوک } ۱۰ = \text{لوک } ۱۰ \times \text{لوک } ۱۰$$

اب حسب دفعہ گزشتہ لوک ۱۰ کی قیمت نکل سکتی ہے
 جس سے معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$\text{لوک } ۱۰ = \frac{1}{۱۰} = ۰.۱۰۹۸۹۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹$$

اسلئے لوک ۱۰ = لوک ۱۰ × ۰.۱۰۹۸۹۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹

پس ثابت ہوا کہ اگر کسی عدد کا لوکار تم اساس ۱۰ پر معلوم کرنا

مقصود ہو تو اس عدد کا جو لوکارتم اساس تو پر ہو اس کو مقدار
..... ۸۴۸ ۴۹ ۳۴ ۳۳ ۳۲ سے ضرب دیتے ہیں اس کسرا عشاریہ
کو ضارب مسین کہتے ہیں اور بالعموم 'مب' سے
تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ ۱

ثابت کر دو کہ

$$(۱) \quad \frac{1}{4} (1 + 1) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$(۲) \quad 1 = (1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots) (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)$$

$$(۳) \quad 1 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots) (\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)$$

$$(۴) \quad \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$(۵) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$(۶) \quad \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots}$$

$$(۷) \quad ۵ = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(۸) \quad ۱ - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$$

$$(9) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \dots \dots \dots \text{تا لانتناہی}$$

ثابت کرو کہ

$$(10) \frac{1-b}{1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1-b}{1} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1-b}{1} \right)^3 + \dots \dots \dots$$

= لوک و ۱ - لوک و ب

$$(11) \text{لوک و } \frac{1+b}{1-b} = 2 \left(1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{8}b^3 + \dots \dots \dots \text{تا لانتناہی} \right)$$

$$(12) \text{لوک و } \frac{1+b}{1-b} = 2 \left(1 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{8}b^3 + \dots \dots \dots \text{تا لانتناہی} \right)$$

اگر لا < 1

$$(13) \text{لوک و } (1 + 3b + 2b^2 + \dots) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

بشرطیکہ ۲ لا بڑا نہ ہو و ۱ سے

$$(14) 2 \text{ لوک و } 1 - \text{لوک و } (1+b) - \text{لوک و } (1-b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$+ \frac{1}{3 \times 4} + \dots \dots \dots \text{اگر لا} < 1$$

$$(15) \text{لوک و } 2 = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots \dots \dots \text{تا لانتناہی}$$

$$(16) \text{لوک و } 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \dots \dots \dots \text{تا لانتناہی}$$

$$(17) \text{مس ط} + \frac{1}{2} \text{مس ط} + \frac{1}{6} \text{مس ط} + \dots \dots \dots$$

$$= \frac{1}{2} \text{لوک } \frac{\text{جم (ط) - } \left(\frac{\eta}{\eta} \right)}{\left(\frac{\eta}{\eta} + \text{ط} \right)} \text{اگر ط} > \frac{\eta}{\eta}$$

(۱۸) اگر طہ $< \frac{n}{4}$ اور $n > 4$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ جب طہ } + \frac{1}{n} \text{ جب } ۳ \text{ طہ } + \frac{1}{5} \text{ جب } ۵ \text{ طہ } + \dots \text{ تا لا تنہا ہی}$$

$$= ۲ \left[\text{مم } \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \text{ مم } \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \text{ مم } \frac{1}{4} + \dots \text{ تا لا تنہا ہی} \right]$$

اور اگر طہ $< \text{صفر}$ اور $\frac{n}{4} > 4$ تو ثابت کرو کہ

$$(۲) \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ طہ } + \frac{1}{12} \text{ جب } ۳ \text{ طہ } + \frac{1}{20} \text{ جب } ۵ \text{ طہ } + \dots \text{ تا لا تنہا ہی}$$

$$= ۲ \left[\text{مس } \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \text{ مس } \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \text{ مس } \frac{1}{4} + \dots \text{ تا لا تنہا ہی} \right]$$

(۱۹) اگر مس > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } ۱ \text{ طہ } - \frac{1}{4} \text{ مس } ۲ \text{ طہ } + \frac{1}{12} \text{ مس } ۳ \text{ طہ } - \dots \text{ تا لا تنہا ہی}$$

$$= \text{جب } ۲ \text{ طہ } + \frac{1}{12} \text{ جب } ۳ \text{ طہ } + \frac{1}{20} \text{ جب } ۵ \text{ طہ } + \dots \text{ تا لا تنہا ہی}$$

(۲۰) ثابت کرو کہ اگر ۲ طہ، ۴ کا ضعف نہ ہو تو

$$\text{لوک مم طہ} = \text{جم } ۲ \text{ طہ } + \frac{1}{12} \text{ جم } ۳ \text{ طہ } + \frac{1}{20} \text{ جم } ۵ \text{ طہ } + \dots \text{ تا لا تنہا ہی}$$

(۲۱) ثابت کرو کہ $\{ \text{لوک } (۱ + لا) \}^۲$ کی تفصیل میں لا کا سر

$$\frac{۲(۱-۱)^۰}{ن} \left[۱ + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n-۱} \right] \text{ ہوگا}$$

(۲۲) - دفعات ۱۱، ۱۲ کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$\text{لوک } ۲ = ۳.۱۰۳ \dots \dots \dots$$

اور لوک ۳ = ۱۲ ۷۷ ۳

(۲۳) معنی ما = لوک لا کو مرتم کرو

[اگر لا منفی ہو تو ما خیالی ہوگا۔ جب لا صفر کے مساوی ہو تو

۱ = -∞ جب لا = ۱ تو ما کی قیمت صفر ہوگی۔ جب لا مثبت ہو اور ایک

سے بڑا ہو تو ما ہمیشہ مثبت رہے گا۔ جب لا لا متناہی ہو تو ما بھی لا متناہی ہوگا]

(۲۴) معنی ما = لوک لا کو مرتم کرو۔ اس کا اور گزشتہ مشق کے

معنی کلہندی ربط معلوم کرو [دفعہ ۱۵۳ حصہ اول کو استعمال کرو]

(۲۵) معنی ما = لا کو مرتم کرو۔

۱۳۔ اگلے باب میں ذیل کی دو انتہائی قیمتوں کے استعمال

کی ضرورت واقع ہوگی۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ (جم ع) کی انتہائی قیمت

ایک ہو جاتی ہے جب ن لا انتہا

بڑھ جائے۔

جم ع = (۱- جب ع)

∴ (جم ع) = (۱- جب ع) = (۱- جب ع) = (۱- جب ع) = (۱- جب ع)

اب (۱- جب ع) کی بجائے م فرض کرنے سے

نہا {۱- جب ع} = نہا {۱+م} = ۱ = ۱ [نتیجہ صریح دفعہ ۱۵۳]

نیز از روئے دفعہ ۲۳۴ (حصہ اول)

$$\frac{ن}{۴} \text{ جب } \frac{ع}{ن}$$

$$\left[\frac{ع}{ن} = \frac{ن}{۴} \right] \text{ بشرطیکہ } ن = ۰ \times ۱ = \frac{ع}{۴} \times \left(\frac{ع}{ن} \right) =$$

پس جب ن مائل بہ لاتنا ہی ہو تو

$$\left[\frac{ع}{ن} \right] = ۱ = ۱$$

متبادل ثبوت - لو کار تہی سلسلہ کے استعمال سے بھی یہ
انتہائی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے کیونکہ (جم ع) ن
کوئی کے مساوی فرض کرنے سے

$$\text{لوک پی} = ن \text{ لوک و جم } \frac{ع}{ن} = \frac{ن}{۴} \text{ لوک و جم } \frac{ع}{ن}$$

$$= \frac{ن}{۴} \text{ لوک و } (۱ - \text{جب } \frac{ع}{ن})$$

$$= - \frac{ن}{۴} (\text{جب } \frac{ع}{ن} + \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{ع}{ن} + \frac{۱}{۴} \text{ جب } \frac{ع}{ن} + \dots)$$

..... دفعہ ۸

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ لمحاظ قیمت کے (جب ع) اور

سلسلہ (جب ع) + جب ع + جب ع + تا لاتنا ہی کے
درمیان واقع ہوتا ہے -

یعنی سلسلہ جب $\frac{ع}{ن}$ اور جب $\frac{ع}{ن}$ کے درمیان واقع ہوتا ہو
۱۔ جب $\frac{ع}{ن}$

یعنی جب $\frac{ع}{ن}$ اور $\frac{ع}{ن}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے

لہذا (۔ لوک ی) ذیل کی دو رقوم کے درمیان واقع ہوگا۔

$\frac{ن}{ن}$ جب $\frac{ع}{ن}$ اور $\frac{ن}{ن}$ مس $\frac{ع}{ن}$ (۱)

لیکن

$$\frac{ن}{ن} \text{ جب } \frac{ع}{ن} = \frac{ن}{ن} \left(\frac{ع}{ن} \right) \times \frac{ع}{ن} = ۰ \times ۱ = ۰$$

$$\text{اور نہا } \frac{ن}{ن} \text{ مس } \frac{ع}{ن} = \frac{ن}{ن} \left(\frac{ع}{ن} \right) \times \frac{۱}{ن} \times \frac{ع}{ن} = ۰ \times ۱ = ۰$$

$$۰ = ۰ \times ۱ \times ۱ = \text{دفعہ ۲۳۴ حصہ اول}$$

اس سے معلوم ہوا کہ (۱) کی دونوں مقداروں کی انتہائی قیمت صفر ہے

پس لوک ی بھی صفر ہوگا، یعنی $ی = ۱$

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر $ن$ لا انتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{ع}{ن} \right)$

کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے۔

دفعہ ۲۳۳ حصہ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ جب طہ طہ اور مس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوتے ہیں۔
 بنا برین جب $\frac{ع}{ن}$ ، $\frac{ع}{ن}$ اور مس $\frac{ع}{ن}$ بھی صعودی ترتیب میں ہیں۔

اسلئے ۱، $\frac{ع}{ن}$ ، $\frac{۱}{ج}$ بھی صعودی ترتیب میں ہیں۔
 جب $\frac{ع}{ن}$ جم $\frac{ع}{ن}$

پس $\left(\frac{ع}{ن}\right)$ کی قیمت ۱ اور $\left(\frac{۱}{ج}\right)$ کے

درمیان واقع ہوگی یعنی $\left(\frac{ع}{ن}\right)$ اور $\left(\frac{۱}{ج}\right)$ کے درمیان واقع ہوگا

لیکن دفعہ گزشتہ کی رو سے اگر ن لانتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{ع}{ن}\right)$

کی انتہائی قیمت ایک ہو جاتی ہے

اسلئے جب ن لانتہا بڑھ جائے تو $\left(\frac{ع}{ن}\right)$ کی انتہائی

قیمت ایک کے نہایت قریب ہوگی

۱۶۔ دفعہ ۲ میں ایک بات غور طلب ہے۔

ہمیں زیادہ موثق طور پر یہ ثابت کرنا چاہیے کہ اگر ن لانتہا ہی ہو تو فی الحقیقت مساوات (۱) کی بائیں جانب کے سلسلہ کی قیمت سلسلہ (۲) کے

بالفاظ دیگر $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ تا لانتا ہی

اور $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ لانتا ہی

— $\frac{1}{2}$ ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ تا لانتا ہی) کے درمیان واقع ہوگی

اب بموجب دفعہ ۶ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ تا لانتا ہی

مستحق ہے۔ اسلئے مقدار $\frac{1}{2}$ ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$) کی قیمت

صغر ہو جائے گی جب ن مائل یہ لانتا ہی ہو

اسلئے بالآخر دفعہ (۲) کا سلسلہ (۱) انتہائی صورت میں ذیل

کا سلسلہ بن جائے گا۔

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ تا لانتا ہی

اسی قسم کا استدلال دفعہ ۵ کے سلسلوں اور نیز دفتات

۳۲، ۳۳ کے سلسلوں پر بھی صادق آئیگا۔



باب دوم

ملتف مقداریں

Complete x

ڈمی مائرے کا مسئلہ

۱۷۔ ملتف مقداریں۔ اگر لا اور ما دونوں حقیقی ہوں تو مقدار لا + ما - ۱ کو مقدار ملتف کہتے ہیں۔ لہذا ثابت ہوا کہ ملتف مقدار ایسی دور قوم کے حاصل جمع پر مشتمل ہوتی ہے۔ جن میں سے ایک رقم بالتمام حقیقی ہوتی ہے اور دوسری بالتمام غہ حقیقی (یعنی خیالی)

۱۸۔ ایک ملتف مقدار کو ہمیشہ r (جم ط + ما - ۱ جب ط) کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ جہاں r ، اور ط دونوں حقیقی ہیں۔

فرض کرو کہ لا + ما - ۱ = r (جم ط + ما - ۱ جب ط)

$$= r \text{ جم ط} + \text{ما} - ۱ \text{ جب ط}$$

مساوات بالا کے دونوں جانب کے حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ مساوی کرنے سے

(۱) رجم طہ = لا

(۲) اور رجب طہ = ما

اور ان کے مربعوں کو باہم جمع کرنے سے

$$ر^2 = لا^2 + ما^2 \text{ یعنی } ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$$

رواجاً جذر ہذا کی علامت مثبت لیتے ہیں۔ پس ر کی قیمت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

تب (۱) اور (۲) سے

$$\frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجم طہ} \quad \text{اور} \quad \frac{ما}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجب طہ}$$

لا اور ما کی قیمتیں خواہ کچھ ہی کیوں نہ ہوں، + ۱۱ اور - ۱۱ کے درمیان طہ کی ایک اور صرف ایک ہی قیمت ہوگی جو اوپر کی دونوں مساواتوں کو پورا کرے گی۔

پس ثابت ہوا کہ مقدار لا + ما - ۱۱ ہمیشہ (رجم طہ + ما - ۱۱ جب طہ) کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

تعریف۔ مقدار + ما - لا + ۱۱ کو متذکرہ بالا تلف مقدار کا مقیاس کہتے ہیں اور طہ کی وہ قیمت - ۱۱ اور

+ ۱۱ کے درمیان واقع ہو اور ہر دو رواجاً

$$\frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجم طہ} \quad \text{اور} \quad \frac{ما}{\sqrt{لا^2 + ما^2}} = \text{رجب طہ} \text{ کو پورا کرے}$$

جملہ لا + م - ا کی سمت کی خاص قیمت کہلاتی ہے

۱۱ - مشتق ۱ - مقدار + م - ا کو مذکورہ بالا شکل میں ظاہر کرو

$$\text{یہاں } ۱ + م - ا = ر (\text{جم طہ} + م - ا \text{ جب طہ})$$

$$\text{جس سے } ر \text{ جم طہ} = ۱$$

$$ر \text{ جب طہ} = ۱$$

$$\text{پس } ر = ۱ + م - ا = ۲ م +$$

$$\text{لہذا } \text{جم طہ} = \frac{۱}{۲ م} \text{ اور } \text{جب طہ} = \frac{۱}{۲ م}$$

$$\text{یعنی طہ} = \frac{۲}{۲ م}$$

$$\text{اس لئے } ۱ + م - ا = ۲ م = [\text{جم } \frac{۲}{۲ م} + م - ا \text{ جب } \frac{۲}{۲ م}]$$

پس رقم مذکور کا تقیاس م - ا ہے اور اس کی سمت کی خاص قیمت $\frac{۲}{۲ م}$ ہے۔

مشتق ۲ - رقم - ۱ + م - ا کو مذکورہ بالا شکل میں منتقل کرو۔

$$\text{اس جگہ } - ۱ + م - ا \times ۳ = ر (\text{جم طہ} + م - ا \text{ جب طہ})$$

$$\text{پس } ر \text{ جم طہ} = - ۱ \text{ اور } ر \text{ جب طہ} = ۳ م$$

$$\therefore ر = - ۱ + م - ا \times ۳ = ۲ +$$

$$\text{لہذا } \text{جم طہ} = - \frac{۱}{۲} \text{ اور } \text{جب طہ} = \frac{۳ م}{۲}$$

$$\text{یعنی طہ} = \frac{۲ م}{۳}$$

$$\therefore 1 - \sqrt{3} = 2 \left[\text{جم } \frac{\pi^2}{3} + \sqrt{3} - 1 \text{ جب } \frac{\pi^2}{3} \right]$$

مشق ۳۰ - مقدار - ۱ - $\sqrt{3}$ کو مذکورہ بالا شکل میں لاؤ۔

یہاں رجم طہ = ۱ اور رجب طہ = $\sqrt{3}$

پس $r = \sqrt{3} + 1 = 2 + 1$ لہذا رجم طہ = $\frac{1}{4}$ اور رجب طہ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$
چونکہ رجم طہ کے لئے ایسی قیمت منتخب کرتے ہیں جو - π اور π کے
درمیان واقع ہو اسلئے طہ = $\frac{\pi^2}{3}$

$$\therefore 1 - \sqrt{3} = 2 \left[\text{جم } \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) + \sqrt{3} - 1 \text{ جب } \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) \right]$$

۳۰۔ دفعہ ۱۸ کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\sqrt{3} + 1} = \text{رجم طہ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ما}}{\sqrt{3} + 1} = \text{رجب طہ}$$

طہ کی ایک سے زیادہ قیمتوں سے پوری ہوتی ہو، اس کی وجہ یہ ہے کہ کسی زاویہ کی جیب اور جیب π کی قیمتوں میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی جب اس زاویہ میں π^2 کے کسی ضعف کا اضافہ کر دیا جائے۔

پس اگر طہ سے ایسی قیمت مراد لی جائے جو π اور π کے درمیان واقع ہو۔ اور مذکورہ بالا روابط کو پورا کرے تو وہ سب زدایا بھی جو π $\pi + 2$ طہ سے تعبیر کئے جاسکتے ہیں روابط مذکورہ کو پورا کرینگے۔ یا بافاظ دیگر ہم یوں کہہ سکتے ہیں۔

کہ ایک تلف مقدار کی سمت کثیر القیمت ہوتی ہے اور سمت کی خاص قیمت سے اس کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جو +۲ اور -۲ کے درمیان واقع ہو۔ اس جگہ سے کوئی صحیح عدد مراد ہے اگر ہم طہ کی خاص قیمت میں ۲۲ کا کوئی ضعیف جمع کر دیں۔ تو اس کی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت حاصل ہوگی خلاصہ یہ ہے کہ

اگر طہ سے ایسا زاویہ مراد ہو جو -۲ اور +۲ کے درمیان واقع ہو اور ذیل کی دونوں مساواتوں

$$\frac{لا}{\sqrt{لا^2 + ۲}} = \text{جہ طہ}$$

(۱)

$$\frac{۲}{\sqrt{لا^2 + ۲}} = \text{جہ طہ}$$

کو پورا کرے

تو لا + ۲ - ۱ = ۲ لا + ۲ = [جہ (۲۲ + طہ) + ۲ - ۱] (۲۲ + طہ) مقدار ۲ ن + طہ کو سمت اور طہ کو اس سمت کی خاص قیمت

کہتے ہیں۔

اختصار کی غرض سے مساوات (۱) کو بالعموم مسطہ = $\frac{۲}{لا}$ یعنی طہ = مس $\frac{۲}{لا}$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ یہاں طہ سے مراد صرف وہ زاویہ ہے جو ہر دو مساواتات

(۱) کو پورا کرتا ہے۔

۲۱۔ ڈی مائرے کا مسئلہ۔ ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو مثبت ہو یا منفی، صحیح عدد ہو یا مکسور، ہر حالت میں

(جم ط + م-ا جب ط) ن

کی قیمت یا اسکی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ن ط + م-ا جب ن ط) ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب عمل ضرب سے

(جم ع + م-ا جب ع) (جم ب + م-ا جب ب)

= جم ع جم ب - جب ع جب ب + م-ا [جب ع جم ب + جم ع جب ب]

= جم (ع + ب) + م-ا جب (ع + ب)

اسی طرح سے (جم ع + م-ا جب ع) (جم ب + م-ا جب ب)

= [جم (ع + ب) + م-ا جب (ع + ب)] [جم ج + م-ا جب ج]

= جم (ع + ب) جم ج - جب (ع + ب) جب ج

+ م-ا [جب (ع + ب) جم ج + جم (ع + ب) جب ج]

= جم (ع + ب + ج) + م-ا جب (ع + ب + ج)

ظہر ہے کہ ہم جہاں تک چاہیں اس عمل کو وسعت دے سکتے ہیں۔

لہذا (جم عہ + مآ- آ جب عہ) (جم بہ + مآ- آ جب بہ)

x (جم جہ + مآ- آ جب جہ) ن اجزائے ضربی تک

= جم (عہ + بہ + جہ + ن رقوم تک)

+ مآ- آ جب (عہ + بہ + جہ + ن رقوم تک)

اس میں عہ = بہ = جہ = = ط رکھنے سے

(جم طہ + مآ- آ جب طہ) = جم ن طہ + مآ- آ جب ن طہ

صورت دوم - فرض کرو کہ ن ایک منفی صحیح عدد ہے۔
اور - م کے برابر ہے - قوت نماؤں کے معمولی ضوابط کے
بموجب

(جم طہ + مآ- آ جب طہ) = جم ن طہ + مآ- آ جب ن طہ

جیسا کہ

$$\frac{(جم طہ + مآ- آ جب طہ)}{(جم م طہ + مآ- آ جب م طہ)} = \frac{(جم ن طہ + مآ- آ جب ن طہ)}{(جم م طہ + مآ- آ جب م طہ)}$$

جم م طہ - مآ- آ جب م طہ

= (جم م طہ - مآ- آ جب م طہ) (جم م طہ - مآ- آ جب م طہ)

$$\frac{\text{جہم م ط} - \text{م} - \text{ا} - \text{ا جب م ط}}{\text{جہم م ط} + \text{جب م ط}}$$

$$= \text{جہم م ط} - \text{م} - \text{ا} - \text{ا جب م ط}$$

$$= \text{جہم} (- \text{م}) \text{ ط} + \text{ا} - \text{ا جب} (- \text{م}) \text{ ط}$$

$$= \text{جہم ن ط} + \text{ا} - \text{ا جب ن ط}$$

صورت سوم - فرض کرو کہ ن ایک کسر $\frac{\text{ن}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہے جہاں ق سے کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے اور ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
گزشتہ صورتوں کی رو سے (جہم ط + ا - ا جب ط) ق

$$= \text{جہم ط} \times \text{ق} + \text{ا} - \text{ا جب ط} \times \text{ق} = \text{جہم ط} + \text{ا} - \text{ا جب ط}$$

اسلئے جہم ط + ا - ا جب ط ایک ایسے ق ہے

جسکی ق دیں قوت جہم ط + ا - ا جب ط ہے۔

لہذا جہم ط + ا - ا جب ط کے ق دیں جذروں میں سے

ایک جذر جہم ط + ا - ا جب ط ہے۔

یعنی (جہم ط + ا - ا جب ط) $\frac{1}{\text{ق}}$ کی ق قیمتوں میں سے ایک

قیمت جم ط + ۱۰-۱ جب ط ہے ان دونوں رقوم میں
سے ہر ایک کی ف دیں قوت لو۔ تب ظاہر ہے کہ

(جم ط + ۱۰-۱ جب ط) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ط + ۱۰-۱ جب ط) ہے

یعنی جم ف ط + ۱۰-۱ جب ف ط ہے

۲۲۔ بالعموم ۱۰-۱ کو حرف خ سے یا اختصاراً آخر
سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور بعد ازیں یہی طریق کتابت قائم
رکھا جائے گا۔

اسلئے جم ط + خ جب ط سے مراد جم ط + ۱۰-۱ جب ط ہوگی
مشق ۱۔ اختصار کرو

(جم ۳ + خ جب ۳ ط) = (جم ۲ + خ جب ۲ ط)

(جم ۵ + خ جب ۵ ط) = (جم ۴ + خ جب ۴ ط)

ظاہر ہے کہ (جم ۳ ط + خ جب ۳ ط) = (جم ۲ ط + خ جب ۲ ط)

اور جم ط - خ جب ط = جم (- ط) + خ جب (- ط) = (جم ط + خ جب ط)

نیز (جم ۵ ط + خ جب ۵ ط) = (جم ۴ ط + خ جب ۴ ط)

اور جم ۲ ط - خ جب ۲ ط = جم (- ۲ ط) + خ جب (- ۲ ط)

$$= (\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۱۰}$$

پس مذکورہ بالا رقم

$$= \frac{(\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۱۵} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۳-}}{(\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۳۵} (\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۱۰-}}$$

$$= (\text{جم ط} + \text{خر جب ط})^{۱۳-} = \text{جم } ۱۳ \text{ ط} - \text{خر جب } ۱۳ \text{ ط}$$

مشق ۲- اگر ۲ جم ط = لا + $\frac{۱}{۲}$ اور ۲ جم ف = ما + $\frac{۱}{۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^۲ \text{ ما}^۲ + \frac{۱}{\text{لا}^۲ \text{ ما}^۲} \text{ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت}$$

$$۲ \text{ جم} (\text{م ط} + \text{ن ف}) \text{ ہوگی}$$

$$\text{ظاہر ہے کہ لا}^۲ - ۲ \text{ لا جم ط} = ۱ -$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{جم ط})^۲ = ۱ - \text{جم}^۲ \text{ ط} = - \text{خر جب}^۲ \text{ ط}$$

$$\therefore \text{لا} = \text{جم ط} + \text{خر جب ط}$$

$$\text{یعنی لا}^۲ = \text{جم م ط} + \text{خر جب م ط}$$

$$\text{اور لا}^۲ = \text{جم م ط} - \text{خر جب م ط}$$

$$\text{اسی طرح سے ما} = \text{جم ف} + \text{خر جب ف}$$

$$\text{یعنی ما}^۲ = \text{جم ن ف} + \text{خر جب ن ف}$$

$$\text{اور ما}^۲ = \text{جم ن ف} - \text{خر جب ن ف}$$

$$\therefore \text{لا}^۲ \text{ ما}^۲ + \frac{۱}{\text{لا}^۲ \text{ ما}^۲} = (\text{جم م ط} + \text{خر جب م ط}) (\text{جم ن ف} + \text{خر جب ن ف})$$

$$+ (\text{جم م ط} - \text{خر جب م ط}) (\text{جم ن ف} - \text{خر جب ن ف})$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{جم} (\text{م ط} + \text{ن ذ}) + \text{خر جب} (\text{م ط} + \text{ن ذ}) \\
 &+ \text{جم} (\text{م ط} + \text{ن ذ}) - \text{خر جب} (\text{م ط} + \text{ن ذ}) \\
 &= ۲ \text{جم} (\text{م ط} + \text{ن ذ})
 \end{aligned}$$

اسی طرح سے یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{۲۱}{۲۱} + \frac{۲۱}{۲۱}$$

کی ایک قیمت ۲ جم (م ط - ن ذ) ہوگی

مشق ۳ - اگر جب عہ + جب بہ + جب جہ = جم عہ + جم بہ + جم جہ =
تو ثابت کرو کہ

جم ۳ عہ + جم ۳ بہ + جم ۳ جہ = ۳ جم (عہ + بہ + جہ)
اور جب ۳ عہ + جب ۳ بہ + جب ۳ جہ = ۳ جب (عہ + بہ + جہ)
علم مثلث میں بہت سی ایسی مثال مساواتیں ہیں جو الجبر کی مثال مساواتوں
سے اخذ کی گئی ہیں۔ مشق ہذا ایسی مساواتوں کی ایک مثال ہے۔

ہم کو الجبرا سے معلوم ہے کہ اگر ۱ + ب + ج = ۰

$$۱ + ۲ب + ۳ج = ۰$$

فرض کرو کہ ۱ = جم عہ + خر جب عہ

$$۲ب = جم بہ + خر جب بہ$$

$$۳ج = جم جہ + خر جب جہ$$

چونکہ ۱ + ب + ج = ۰

∴ (جم ع + خ جب ع) + (جم ب + خ جب ب) + (جم ج + خ جب ج)
 = ۳ (جم ع + خ جب ع) (جم ب + خ جب ب) (جم ج + خ جب ج)
 یعنی ڈی با ئیرے کے مسئلہ سے

(جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج) + (جم ۳ ع + جم ۳ ب + جم ۳ ج)
 = ۳ (جم ع + ب + ج) + ۳ (خ جب ع + ب + ج)
 حقیقی حصوں کو آپس میں اور خیالی حصوں کو آپس میں الگ الگ برابر
 کرنے سے نتائج مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

امثلہ ۲

ذیل کی رقوم کو ر (جم ط + خ جب ط) کی شکل میں منتقل کرو۔
 (۱) ۱ + خ (۲) ۱ - خ (۳) ۱ - ۳ + خ
 (۴) ۳ + ۴ + خ (۵) ۱ + ۱ + ۲ + خ (۶) ۲ - ۲ + ۳ + خ
 اختصار کرو۔

(۷) (جم ط - خ جب ط) (جم ع + خ جب ع) (جم ب + خ جب ب)
 (جم ع + خ جب ع) (جم ب + خ جب ب) (جم ل + خ جب ل)
 (۸) (جم ۲ ط - خ جب ۲ ط) (جم ۳ ط + خ جب ۳ ط) - ۵
 (جم ۴ ط + خ جب ۴ ط) (جم ۵ ط - خ جب ۵ ط) - ۶
 (۹) (جم ۵ ط - خ جب ۵ ط) (جم ۶ ط + خ جب ۶ ط) (جم ۷ ط - خ جب ۷ ط)
 (۱۰) (جم ۸ ط + خ جب ۸ ط) (جم ۹ ط - خ جب ۹ ط) (جم ۱۰ ط + خ جب ۱۰ ط)
 (۱۱) (جم ۱۱ ط - خ جب ۱۱ ط) (جم ۱۲ ط + خ جب ۱۲ ط) (جم ۱۳ ط - خ جب ۱۳ ط)

$$\left\{ (جم - ط - ج - ذ) + (خ - جب - ذ) \right\}^{\text{ن}}$$

$$+ \left\{ (جم - ط - ج - ذ) - (خ - جب - ذ) \right\}^{\text{ن}}$$

ثابت کرو کہ

$$(ب - لا + خ - جم - لا)^{\text{ن}} = (جم - لا)^{\text{ن}} + (خ - جب - ن)^{\text{ن}}$$

$$\text{اور } \left(\frac{ا + جب - ذ + خ - جم - ذ}{ا + جب - ذ - خ - جم - ذ} \right)^{\text{ن}} = (جم - \frac{ن}{۲} - ن - ذ)$$

$$+ (خ - جب - \frac{ن}{۲} - ن - ذ)$$

اگر جم + خ - جب + جم + خ - جب + جم + خ - جب + جم + خ - جب

اور جم + خ - جب + جم + خ - جب

بالترتیب 'لا' مای اور سے رکے جائیں۔ تو ثابت کرو کہ

$$(لا + ا) (ا + ی) = جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ$$

$$\left[\frac{جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ}{۲} + \frac{خ - جب - ط - ج - ذ - خ - جب - ط - ج - ذ}{۲} \right]$$

$$\frac{ا}{(لا - ا) (ا - ی)} = \frac{۱}{جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ}$$

$$\left[\frac{جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ}{۲} - \frac{خ - جب - ط - ج - ذ - خ - جب - ط - ج - ذ}{۲} \right]$$

$$لا - ا + ا + ی = جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ$$

$$\left[\frac{جم - ط - ج - ذ - جم - ط - ج - ذ}{۲} + \frac{خ - جب - ط - ج - ذ - خ - جب - ط - ج - ذ}{۲} \right] \times$$

۱۶ - مساوات کا مسئلہ

$$(۱-ب^۱)(ج^۱-ڈ^۱) = (ج^۱-ب^۱)(۱-ڈ^۱) + (۱-ج^۱)(ب^۱-ڈ^۱)$$

میں لاکھ بچائے جم ۷ + خر جب ۷ اور اسی طرح ب، ج، د کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ذیل کی مساوات متاخذ ثابت کرو

$$\text{جب (ع - ب) جب (ج - د) = جب (ع - ل) جب (ج - ب) جب (ج - ب) جب (ع - ل) + جب (ع - ج) جب (ع - ل)}$$

۱۸ - مساوات متاخذ

$$\frac{(۱-ب)(ج-د)}{(۱-ب)(ج-د)} + \frac{(۱-ج)(ب-د)}{(۱-ج)(ب-د)} + \frac{(۱-د)(ب-ج)}{(۱-د)(ب-ج)} = \frac{(۱-ب)(ج-د)}{(۱-ب)(ج-د)} + \frac{(۱-ج)(ب-د)}{(۱-ج)(ب-د)} + \frac{(۱-د)(ب-ج)}{(۱-د)(ب-ج)}$$

میں لاکھ بچائے جم ۲ ط + خر جب ۲ ط اور اسی طرح ۱، ب، اور ج کی بجائے متشابہ رقوم لکھ کر ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب (ط - ب) جب (ط - ج)}}{\text{جب (ع - ب) جب (ع - ج)}} = \text{جب (ط - ع) جب (ط - د) + دو اور متشابہ رقوم} =$$

$$\frac{۱}{(۱-ب)(ج-د)} = \frac{۱}{(۱-ب)(ج-د)} + \frac{۱}{(۱-ب)(ج-د)} = \frac{۱}{(۱-ب)(ج-د)}$$

سے متماثل مساواتیں مستنبط کرو

۱۹ - ثابت کرو کہ

$$(۱+ب^۱)(ج^۱-ڈ^۱) + (۱-ب^۱)(ج^۱-ڈ^۱) = (ج^۱-ب^۱)(۱-ڈ^۱) + (ج^۱-ب^۱)(۱-ڈ^۱)$$

$$۲۰ - اگر ۲ جم ط = لا + ۱ تو ثابت کرو کہ ۲ جم رط = لا + ۱$$

حجم ط + م - جب ط

$$\text{حجم} + \frac{22 + \text{طه}}{ق} = 1 + \text{جب} \frac{22 + \text{طه}}{ق}$$

$$\text{جـم} \frac{\text{ط} + \text{ن ن}}{\text{ق}} + \sqrt{-1} \text{ حـب} \frac{\text{ط} + \text{ن ن}}{\text{ق}}$$

حجم $\frac{144 + ط}{ق} + 1 - 1$ جب $\frac{144 + ط}{ق}$ (۱)

میں سے ہر ایک، جملہ (جملہ + ما - ا جب طہ) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہوگی۔

یہ امر قابل غور ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت جو ن کو دی جاسکتی ہے وہ (ق-۱) ہے۔ کیونکہ اگر ن کو ق ' ۱ + ق ' ۲ + کے برابر فرض کریں تو ان سے وہی نتائج حاصل ہونگے جو ن کو بالترتیب ۳، ۱، ۰ وغیرہ کے مساوی فرض کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

نیز مقادیر (۱) میں سے کوئی دو مقداریں ایک دوسرے کے مساوی نہیں کیونکہ ان میں جتنے زاوے شامل ہیں ان میں سے کسی دو زاویوں کا فرق ہر حالت میں ۲۲ سے کم ہے اور ظاہر ہے کہ جب دو زاویوں کا فرق ۲۲ سے کم ہو تو یہ ناممکن ہے کہ ان کی جیوب بھی برابر ہوں

اور چوب الٹام بھی۔

خلاصہ یہ ہے کہ جملہ

$$\text{جم} \frac{۲ن + ط}{ق} + ۱ - ۱ = \text{جب} \frac{۲ن + ط}{ق} \text{ میں } ن \text{ کو}$$

علی التواتر ۱، ۲، ۳، (ق - ۱) قیمتیں
دینے سے ہم

$$(\text{جم} ط + ۱ - ۱ = \text{جب} ط) \frac{۱}{ق}$$

کی ق (اور صرف ق ہی) مختلف قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں
۲۳ - اگر لا + خرما کی شکل کی کوئی رقم دی ہوتی
ہو تو ہم دفعہ ما قبل کی رو سے رقم مذکور کے کسی جذر
کے واسطے مثلثی جملے معلوم کر سکتے ہیں
دفعہ ۲۰ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ لا + خرما

$$= \text{ص} [\text{جم} (۲ن + ط) + ۱ - ۱ = \text{جب} (۲ن + ط)]$$

$$\text{جہاں ص} = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

اور ط ایک ایسا زاویہ ہے کہ جم ط = ۱ اور جب ط = ۱

$$\frac{۱}{ق} = (لا + خرما) \frac{۱}{ق}$$

$$\text{ص} \frac{۱}{ق} [\text{جم} \frac{۲ن + ط}{ق} + ۱ - ۱ = \text{جب} \frac{۲ن + ط}{ق}]$$

اس میں ن کو علی التواتر ۱، ۲، ۳، (ق - ۱) قیمتیں دینے سے
ق مطلوبہ جذر معلوم ہوتے ہیں۔

۲۵ - مشق (۱) (جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$) کی قیمتیں معلوم کرو
(جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$)

= [جم $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$ جب $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$] $\frac{1}{12}$ جہاں ن کوئی
صحیح عدد ہے۔

= جم $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$ جب $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$

ن کو علی التواتر ۱، ۲، ۳، قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ کے
لئے مندرجہ ذیل رقوم حاصل ہوتی ہیں۔

جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$

جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$

جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$

جم $\frac{n}{12} + 1 - 1$ جب $\frac{n}{12}$

یہ امر قابل غور ہے کہ ن کو ۴ کے برابر لینے سے رقم مذکور کی
کوئی نئی (پانچویں) قیمت حاصل نہیں ہوتی کیونکہ اس حالت میں ذیل
کی رقم حاصل ہوگی۔

جم $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$ جب $(\frac{n}{12} + 1 - 1)$

$$= \text{جم } \frac{n}{12} + m - 1 \text{ جب } \frac{n}{12}$$

اور یہ رقم مندرجہ بالا چار رقوم میں سے پہلی رقم ہے۔ جسکو ہم معلوم کر چکے ہیں۔

اسی طرح $n = 5$ اور $n = 4$ سے $n = 4$ سے ان چار رقوم میں سے بالترتیب دوسری تیسری اور چوتھی رقوم حاصل ہونگی۔

علیٰ ہذا القیاس

مشق ۲۔ (۱۔) کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ $\text{جم } n = 1$ اور جب $n = 0$ اسلئے

$$= \text{جم } (n + 2n) + m - 1 \text{ جب } (n + 2n)$$

$= \text{جم } \frac{n + 2n}{3} + m - 1 \text{ جب } \frac{n + 2n}{3}$
 n کو بالترتیب ۱، ۲ کے برابر لینے سے مطلوبہ قیمتیں حسب ذیل حاصل ہونگی۔

$$\text{جم } \frac{n}{3} + m - 1 \text{ جب } \frac{n}{3} \text{ یعنی } \frac{m-1}{2}$$

$$\text{جم } n + m - 1 \text{ جب } \frac{n}{3} \text{ یعنی } 1$$

$$\text{اور جم } \frac{n+5}{3} + m - 1 \text{ جب } \frac{n+5}{3} \text{ یعنی } \frac{m-1}{2}$$

مشق ۳۔ ذیل کی مساوات کو حل کرو۔

$$9 - 4 + 1 = 0$$

مساوات مذکورہ = (لا^۵ + ۱) (لا^۴ - ۱) = ۰

پہلے جزد ضربی سے لا^۵ = ۱ - جم (۱ + ن ۲) + م - ۱ جب (۱ + ن ۲) ۲

$$\frac{1}{5} [جم (۱ + ن ۲) + م - ۱ جب (۱ + ن ۲) ۲] = لا$$

$$= جم \frac{۲(۱ + ن ۲)}{۵} + م - ۱ جب \frac{۲(۱ + ن ۲)}{۵}$$

ن کو حسب سابق ۱، ۲، ۳، ۴ قیمتیں دینے سے جوابات مطلوبہ حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$$جم ۳۶ + م - ۱ جب ۳۶$$

$$جم ۱۰۸ + م - ۱ جب ۱۰۸$$

$$جم ۱۸۰ + م - ۱ جب ۱۸۰$$

$$جم ۲۵۲ + م - ۱ جب ۲۵۲$$

$$جم ۳۲۴ + م - ۱ جب ۳۲۴ \quad \text{اور}$$

دوسرے جزد ضربی سے لا^۴ = ۱ - جم ۲ ن + م - ۱ جب ۲ ن ۲

$$لا = [جم ۲ ن + م - ۱ جب ۲ ن ۲] \frac{1}{4}$$

$$= جم \frac{۲ ن}{۲} + م - ۱ جب \frac{۲ ن}{۲}$$

اگر ن کو علی التواتر ۱، ۲، ۳ کے برابر فرض کیا جائے

تو جوابات حسب ذیل حاصل ہونگے۔

$$۱، م - ۱ - ۱، م - ۱$$

پس مساوات زیر بحث کی سب اصلیں معلوم ہوں گیں

استثنا

ذیل کی رقوم کی سب قیمتیں معلوم کرو

$$۱ - \frac{1}{4} \quad ۲ - \frac{1}{4} (۱ - ۱)$$

$$۳ - \frac{1}{4} (۳ - ۱) \quad ۴ - \frac{1}{4} (۱ - ۱)$$

$$۵ - \frac{1}{4} (۱ - ۱) \quad ۶ - \frac{1}{4} (۳ - ۱ + ۱)$$

$$۷ - \frac{1}{4} (۱ - ۱ + ۳) \quad ۸ - \frac{1}{4} (۱ - ۱ + ۳)$$

$$۹ - \frac{1}{4} (۱ - ۱ - ۳) \quad ۱۰ - \frac{1}{4} ۱۶$$

$$۱۱ - \frac{1}{4} ۳۲ \quad ۱۲ - \frac{1}{4} (۱ - ۱ + ۳) + \frac{1}{4} (۳ - ۱ - ۱)$$

۱۳ - (جم $\frac{۱۱}{۳} +$ خر جب $\frac{۱۱}{۳}$) کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل کرو جس میں مثلثی جملات شامل نہ ہوں -

۱۴ - (جم $\frac{۱۱}{۳} +$ خر جب $\frac{۱۱}{۳}$) کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل

ضرب معلوم کرو -

۱۵ - ثابت کرو کہ مساوات $لا^۱ + لا^۱۱ = ۱$ کی قیمتیں

$$\pm \frac{۱ - ۵}{۲} \left[\text{جم } \frac{۱۱}{۵} + \text{خر جب } \frac{۱۱}{۵} \right] \text{ ہیں}$$

۱۶ - مساوات $لا^۱ = ۱$ کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی

کونسی اصل مساوات $لا^۱ + لا^۱ + لا^۱ = ۱$ کو پورا کرتی ہے

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱۷- لا + ۱ = ۱۸- لا + لا^۲ + لا^۳ + ۱ = ۰$$

۱۹- ثابت کرو کہ $\overline{لا + ۱} + \overline{لا - ۱}$ کی ن حقیقی قیمتیں ہیں۔

اس سے $\overline{لا + ۱} + \overline{لا - ۱} + \overline{لا - ۱} + \overline{لا - ۱}$ کی حقیقی قیمتیں معلوم کرو۔
۲۰- ثابت کرو کہ ایک کے ن، ن دیں جذر ایک ہندی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۱- ایک کے سات ساتوں جذر معلوم کرو، اگر ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو تو ثابت کرو کہ ان جذروں کی ن دیں قوتوں کا مجموعہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔ بشرطیکہ ن، کا ضعف نہ ہو۔
لیکن اگر ن، کا ضعف ہو تو مجموعہ ۱ ہوگا۔

۲۲- ملف مقادیر کے مسئلہ ثنائی

یہ معلوم ہے کہ اگر ن اور م حقیقی ہوں اور مے ایک سے کم ہو تو

$$(۱+مے) = ۱ + ن + مے \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱}$$

$$+ \frac{ن(۱-ن)(۱-ن)}{۳ \times ۲ \times ۱} + (۱)$$

جب مے ایک ملف مقدار ہو (یعنی $لا + لا^۲ + لا^۳ + ...$) ہو اور ن اور کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو معمولی ثبوت صادق آئیگا۔

اور مسئلہ (۱) اس صورت میں بھی درست رہیگا۔
اگر مے ملطف ہو اور ن منفی ہو یا کسی کسر کے برابر
ہو تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$+۱ + ن + مے + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} + مے^۲ + (۲)$$

(۱+ مے) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے بشرطیکہ
مے کا مقیاس یعنی $۱ + (۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰)$ ایک سے کم ہو۔
اگر یہ مقیاس ایک کے برابر ہو تو یہ مسئلہ صرف
ذیل کی صورتوں میں درست ہوگا۔

(۱) جب ن مثبت ہو اور

(۲) جب ن منفی کسر واجب ہو اور مے ۱ کے برابر نہ ہو

اس کا ثبوت قدرے مشکل ہے اور کتاب ہذا کی وسعت
سے باہر ہے۔ اس لئے ہم محض نتیجہ کو درست فرض کر لیں گے
طالب علم اگر چاہے تو اس مسئلہ کے متعلق مزید معلومات
ہابسن کے علم مثلث دفعات ۲۱۱، ۲۱۲ سے یا کرٹل کے
الجبرا جلد دوم صفحہ ۲۶۲ سے حاصل کر سکتا ہے۔

باب سوم

جب ن طہ اور جم ن طہ کی تفصیلات

جب طہ اور جم طہ کے سلسلے طہ کی قوتوں میں

۲۷۔ ڈی مائرے کے مسئلہ کی مدد سے جم ن طہ اور جب ن طہ کی تفصیلیں طہ کے مثلثی تفاعیل کی رقوم میں معلوم ہو سکتی ہیں۔

ہیں معلوم ہے کہ (جم ن طہ + خر جب ن طہ)

= (جم طہ + خر جب طہ) ن

چونکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اسلئے مسئلہ ثنائی کی رو سے (جم طہ + خر جب طہ) ن کی تفصیل درست ہوگی۔ پس تفصیل کرنے سے

جم ن طہ + خر جب ن طہ = جم ن طہ + ن جم ن طہ - طہ خر جب طہ
+ $\frac{(ن-۱)}{۲}$ جم ن طہ - طہ خر جب طہ

+ $\frac{(ن-۱)(ن-۲)}{۳}$ جم ن طہ - طہ خر جب طہ +

اب چونکہ $خ^۲ = ۱ - خ^۱$ ، $خ^۳ = -خ^۲$ ، $خ^۴ = ۱$ اور $خ^۵ = خ$

اس لئے $جمن طه + خ جب ن طه = جمن طه - \frac{ن(۱-ن)}{۲} جمن طه جب ۲ طه$

$+ \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)(۳-ن)}{۳} جمن طه جب ۲ طه + \dots$

$+ خ [ن جمن طه جب ۲ طه - \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۳} جمن طه جب ۳ طه + \dots]$

حقیقی رقوم کو باہم مساوی کرنے سے

$جمن ن طه = جمن طه - \frac{ن(۱-ن)}{۲} جمن طه جب ۲ طه + \dots (۱)$

اور غیر حقیقی (خیالی) رقوم کو برابر کرنے سے

$جب ن طه = ن جمن طه جب ۲ طه - \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)}{۳} جمن طه جب ۳ طه$

$+ \frac{ن(۱-ن)(۲-ن)(۳-ن)(۴-ن)}{۴} جمن طه جب ۴ طه + \dots (۲)$

اوپر کے دونوں سلسلوں کی رقوم متبادلاً مثبت اور منفی ہیں اور انہیں سے ہر ایک سلسلہ اس وقت تک جاری رہتا ہے۔ جب تک کہ شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے ایک جزو ضربی صفر نہ ہو جائے۔ جب ایک جزو ضربی صفر ہو جاتا ہے

تو سلسلہ ختم ہو جاتا ہے۔
۲۸۔ دفعہ ماقبل میں سلسلہ (۲) کو سلسلہ (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} = \frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ن ط}}$$

$$\text{ن جم ن ط جب ط} - \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲)}}{۳} \text{جم ط جب ط} + \dots =$$

$$\text{جم ن ط} - \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲)}}{۲} \text{جم ط جب ط} + \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳)}}{۳} \text{جم ط جب ط} + \dots$$

اس مساوات کی بائیں جانب کے رکن کے شمار کنندہ اور نسب
 دو لہوں کو جم ن ط پر تقسیم کرنے سے

$$\text{مس ن ط} - \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲)}}{۳} \text{مس ط} + \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳)}}{۴} \text{مس ط} + \dots =$$

$$= ۱ - \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲)}}{۲} \text{مس ط} + \frac{\text{ن (ن-۱) (ن-۲) (ن-۳)}}{۳} \text{مس ط} + \dots$$

۲۹۔ جب ط اور جم ط کی قیمتیں استقراء حسابیہ کے طریقہ سے
 بھی حاصل کی جاسکتی ہیں۔

اس طریقہ میں خیالی مقادیر کے استعمال کی ضرورت نہیں پڑتی۔
 ثبوت کے لئے فرض کرو کہ سلاسل (۱) اور (۲) ن کی کسی خاص
 قیمت کے واسطے درست ہیں۔

چونکہ $\text{جم}(ن+۱) ط = \text{جم}ن ط + \text{جم} ط - \text{جب}ن ط + \text{جب} ط$
 اسلئے $\text{جم}ن ط + \text{جم} ط - \text{جب}ن ط + \text{جب} ط$ کی قیمت سلسلہ (۱) کو
 جم ط سے ضرب دیکر اور سلسلہ (۲) کو جب ط سے ضرب دیکر موزاں ذکر
 حاصل ضرب کو پہلے حاصل ضرب میں سے تفریق کرنے سے معلوم ہو سکتی ہے
 اس حاصل تفریق کے لئے جو سلسلہ برآمد ہوتا ہے اس کی رقوم لکھ
 کو ترتیب دینے سے معلوم ہو گا کہ سلسلہ محصلہ بعینہ وہی ہے جو
 سلسلہ (۱) میں $ن$ کی بجائے $(ن+۱)$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔
 جب $(ن+۱) ط$ کے لئے بھی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔
 پس ثابت ہوا کہ اگر سلسلے (۱) اور (۲) $ن$ کی کسی ایک قیمت
 کے لئے درست ہوں تو لازماً $ن$ کی اس سے بالاتر قیمت کے لئے
 بھی درست ہوں گے۔

لیکن یہ تو ظاہر ہے کہ اگر $ن = ۲$ یا ۳ تو یہ سلسلے درست ہوتے
 ہیں، پس استقرا سے یہ سلسلے $ن$ کی ہر قیمت کے لئے
 درست ہوں گے۔

۴۴۔ اگر غیر مساوی زوایا کی کسی تعداد کا مجموعہ دیا ہوا
 ہو تو ڈی مائیرے کے مسئلہ سے انکے حاصل جمع کی جیب، یا جیب تمام
 یا ماس، ان زوایا کے ماسوں کی رقوم میں معلوم ہو سکتے
 ہیں ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{جم}(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \dots) + \text{خ} \text{جب}(\text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ} + \dots) = (\text{جم} \text{عہ} + \text{خ} \text{جب} \text{عہ})(\text{جم} \text{بہ} + \text{خ} \text{جب} \text{بہ})(\text{جم} \text{جہ} + \text{خ} \text{جب} \text{جہ}) \dots (۱)$$

$$\begin{aligned} \text{اب جم عه} + \text{خر جب عه} &= \text{جم عه} (1 + \text{خر مس عه}) \\ \text{جم به} + \text{خر جب به} &= \text{جم به} (1 + \text{خر مس به}) \end{aligned}$$

پس مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\begin{aligned} \text{جم (عه + به + جه + ...)} + \text{خر جب (عه + به + جه + ...)} \\ = \text{جم عه جم به جم جه ...} (1 + \text{خر مس عه}) (1 + \text{خر مس به}) \\ (1 + \text{خر مس جه}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \text{جم عه جم به جم جه ...} [1 + \text{خر (مس عه + مس به + مس جه + ...)} \\ + \text{خر (مس عه مس به + مس به مس جه + ...)} \\ + \text{خر (مس عه مس به مس جه + مس به مس جه مس لہ + ...)} \\ + \text{...}] \quad (2) \end{aligned}$$

دفعہ ۱۳۱ حصہ اول کا طریق کتابت استعمال کرنے سے یہ مساوات
ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے -

$$\begin{aligned} \text{جم (عه + به + جه + ...)} + \text{خر جب (عه + به + جه + ...)} \\ = \text{جم عه جم به جم جه ...} [1 + \text{خر ص - ص + خر ص - ص + خر ص - ص + ...}] \\ \text{پس مساوات بالا میں خیالی حصوں کو باہم مساوی رکھنے سے} \\ \text{جب (عه + به + جه + ...)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \text{جم عه جم به جم جه ...} (ص - ص + ص - ص + ص - ص + ...) \quad (3) \\ \text{اور حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے جم (عه + به + جه + ...)} \end{aligned}$$

$$= \text{جم عه جم به جم جه ...} (1 - ص + ص - ص + ص - ص + ...) \quad (4)$$

لہذا عمل تقسیم سے

$$\text{مس (عدہ + پہ + چہ + ...)} = \frac{\text{ص}_1 - \text{ص}_2 + \text{ص}_3 - \text{ص}_4 + \text{ص}_5 - \text{ص}_6 + \text{ص}_7 - \text{ص}_8 + \text{ص}_9 - \text{ص}_{10} + \dots}{\text{ا} - \text{ص}_1 + \text{ص}_2 - \text{ص}_3 + \text{ص}_4 - \text{ص}_5 + \text{ص}_6 - \text{ص}_7 + \text{ص}_8 - \text{ص}_9 + \text{ص}_{10} - \dots} \quad (۵)$$

مساواتوں (۳) اور (۴) میں بائیں جانب کے رکنوں کی علامات متبادلاً مثبت اور منفی ہیں۔

رابط (۵) کو استقرار حسابیہ سے دفعہ ۳۱ حصہ اول میں ثابت کیا جا چکا ہے۔

۳۱۔ مشتق ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات $\text{ا}^2 \text{ج م}^2 \text{ط} + \text{ب}^2 \text{ج ب}^2 \text{ط}$ $2 + \text{ا}^2 \text{گ ج م}^2 \text{ط} + 2 \text{ف ب ج ب}^2 \text{ط} + \text{ج} = 0$ کی چار اصلیں ہیں اور ط کی ان تینوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، 2 نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت ضلع ہے۔

فرض کرو کہ $\text{مس} = \frac{\text{ط}}{2}$ ت

$$\text{اور چونکہ حصہ اول دفعہ ۱۱ کی رو سے جب ط} = \frac{2 \text{مس}^2}{\text{ا} + \text{مس}^2}$$

$$\text{اور نجم ط} = \frac{1 - \text{مس}^2}{\text{ا} + \text{مس}^2}$$

$$\text{۱۔ سلتے مساوات بالا} = \text{ا}^2 \left(\frac{1 - \text{ت}}{2 + \text{ا}} \right)^2 + \text{ب}^2 \left(\frac{2}{2 + \text{ا}} \right)^2$$

$$+ 2 \text{گ} + \frac{1 - \text{ا}}{2 + \text{ا}} + 2 \text{ف ب} + \frac{2}{2 + \text{ا}} + \text{ج} = 0$$

$$\text{یا بعد از اختصار} \text{ا}^2 (\text{ا}^2 - 2 \text{گ} + 1 + \text{ج}) + 4 \text{ف ب} + 2 \text{ت} + 2 (\text{ا}^2 \text{ب}^2 - \text{ا}^2 + 2 \text{ج})$$

$$۴ + ن ب ت + ۲۱ + ۲ گ + ۱ ج = ۰ \dots\dots (۱)$$

اس مساوات کی صریحاً چار اصلیں ہیں۔

$$\text{نیز ص} = \text{اصلوں کا مجموعہ} = - \frac{۴ ن ب}{۲۱ - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ دو دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۴ ب - ۲۱ ج}{۲۱ - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = - \frac{۴ ن ب}{۲۱ - ۲ گ + ۱ ج}$$

$$\text{ص} = \text{مجموعہ چار چار اصلوں کو اکٹھا لینے سے} = \frac{۲۱ ج - ۲ گ + ۱ ج}{۲۱ - ۲ گ + ۱ ج}$$

چونکہ ص = ص اسلئے دفا ماقبل سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{مس} = \left(\frac{\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}}{۲} \right) = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{۱ - \text{ص} + \text{ص}} = ۰ = \text{مس ن}$$

اور نسب نما '۱ - ص + ص سفر نہیں ہوتا جب تک کہ '۱ ب کے برابر نہ ہو۔

$$\text{اسلئے ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} = ۲ \times \text{ن} = \text{نیم قطری}$$

یعنی ن نیم قطری زاویوں کا کوئی جفت صنف

[جو طالب علم ہندسہ تحلیلیہ سے واقف ہے اُس سے مخفی نہیں کہ مشق ہذا ذیل کے مسئلہ کا حل ہے۔ "اگر ایک دائرہ اور ایک قطع ناقص ایک دوسرے کو چار نفط ط پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقساط تقاطع کے خارج المرکز زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کا کوئی جفت صنف ہوتا ہے]

امثلہ ۴

ثابت کر دو کہ

$$\begin{aligned}
 ۱۔ & \text{جم } ۴ ط = \text{جم } ۲ ط - ۶ \text{ جم } ۲ ط \text{ جب } ۲ ط + \text{جب } ۲ ط \\
 ۲۔ & \text{جب } ۶ ط = ۶ \text{ جم } ۵ ط \text{ جب } ط - ۲۰ \text{ جم } ۳ ط \text{ جب } ۲ ط + ۶ \text{ جم } ط \text{ جب } ط \\
 ۳۔ & \text{جب } ۷ ط = ۷ \text{ جم } ۶ ط \text{ جب } ط - ۳۵ \text{ جم } ۴ ط \text{ جب } ط + ۲۱ \text{ جم } ط \text{ جب } ط - \text{جب } ط \\
 ۴۔ & \text{جم } ۹ ط = ۹ \text{ جم } ۸ ط - ۳۶ \text{ جم } ط \text{ جب } ۲ ط + ۱۲۶ \text{ جم } ط \text{ جب } ۲ ط - ۸۴ \text{ جم } ط \text{ جب } ط \\
 & + ۹ \text{ جم } ط \text{ جب } ط
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۵۔ & \text{جم } ۸ ط = \text{جم } ط - ۲۸ \text{ جم } ط \text{ جب } ۲ ط + ۷ \text{ جم } ط \text{ جب } ۲ ط \\
 & - ۲۸ \text{ جم } ط \text{ جب } ط + \text{جب } ط
 \end{aligned}$$

مندرجہ ذیل کی قیمتیں مس ط کی رقوم میں لکھو

- ۶۔ مس ۵ ط ۷۔ مس ۷ ط ۸۔ مس ۹ ط
- ۹۔ ثابت کر دو کہ جم ۱۱ ط اور جب ۱۱ ط کی تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب
- ۱۱ جم ط جب ط اور - جب ط ہیں۔
- ۱۰۔ ثابت کر دو کہ جب ۸ ط اور جب ۹ ط کی تفصیلوں میں آخری رقوم
- بالترتیب - ۸ جم ط جب ط اور جب ط ہیں۔
- ۱۱۔ اگر ن کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کر دو کہ جب ن ط اور جم ن ط کی
- تفصیلوں میں آخری رقوم بالترتیب

$$(۱-) \frac{۱-۵}{۲} \text{ جب } ن ط \text{ اور } ن (۱-) \frac{۱-۵}{۲} \text{ جم } ط \text{ جب } ن - ۱ ط \text{ ہونگی۔}$$

$$۱۲۔ \text{اگر ن کوئی حیف عدد ہو تو ثابت کر دو کہ جب } ن ط \text{ اور جم } ن ط \text{ کی}$$

تفصیلات میں آخری رقوم بالترتیب

ن (۱-) $\frac{2-n}{7}$ جم طہ جب ن-۱ طہ اور (۱-) $\frac{n}{6}$ جب ن طہ ہونگی۔

۱۳۔ اگر مساوات لا^۲ + ف لا^۱ + ق لا + ف = ۰ کی جلیں عہ، ہ اور جہ ہوں تو ثابت کرو کہ سوائے ایک خاص صورت کے

مستاع + مستابہ + مستاجہ = ن ۱۱ نیم قطری۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

جب ۳ طہ = ا جب طہ + ب جم طہ + ج

کی ۶ اصلیں ہیں اور طہ کی اُن چھ قیمتوں کا مجموعہ جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں ۱۱ نق کے کسی طاق صنف کے برابر ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مساوات

اھ قط طہ - ب ک قم طہ = لا - ب^۲

کی چار اصلیں ہیں اور طہ کی جو چار قیمتیں اس مساوات کو پورا کرتی ہیں اُنکا حاصل جمع ۱۱ نق کے کسی طاق صنف کے برابر ہے۔

۱۶۔ اگر طہ کی وہ تین قیمتیں جو مساوات

مس ۲ طہ = لہ مس (طہ + عہ)

کو پورا کریں طہ، طہ، طہ ہوں اور ان میں سے کسی دو کا فرق ۱۱ کا کوئی صنف نہ ہو تو ثابت کرو کہ

طہ + طہ + طہ + عہ، ۱۱ کا کوئی صنف ہے۔

کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی تفصیلیں زاویہ

مذکور کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں

$$۳۲- \text{بوجب دفعہ } ۲ \text{ جم } ۱ \text{ طہ} = \text{جم } ۱ \text{ طہ} - \frac{ن (۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ جب } ۱ \text{ طہ}$$

$$+ \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} - \dots$$

اگر ن طہ کو ع کے برابر فرض کیا جائے تو

$$\text{جم } ۱ \text{ طہ} = \text{جم } ۱ \text{ طہ} - \frac{ن (۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ جب } ۱ \text{ طہ}$$

$$+ \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) (۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} - \dots$$

$$= \text{جم } ۱ \text{ طہ} - \frac{ن (۱-ن)}{۲} \text{ جم } ۲ \text{ طہ جب } ۱ \text{ طہ} + \frac{ن (۱-ن) (۱-ن) (۲-ن) (۲-ن)}{۲} \text{ جم } ۳ \text{ طہ جب } ۲ \text{ طہ} - \dots$$

(۱) -

اس مساوات میں طہ کو لا انتہا چھوٹا بنادو اور عہ کو مستقل رکھو جس سے ن لا انتہا بڑا بن جائے گا۔

تب جب طہ کی انتہا ایک ہوگی اور نیز (جب طہ) کی سب قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۵)

نیز جم طہ کی انتہا بھی ایک ہوگی اور جم طہ کی دیگر قوتوں کی انتہا بھی ایک ہوگی۔ (دفعہ ۱۴)

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\text{جہم عہ} = ۱ - \frac{\text{عہ}}{۲} + \frac{\text{عہ}}{۳} - \frac{\text{عہ}}{۴} + \dots \dots \dots \text{تا لانتا ہی}$$

(سلسلہ ہذا کا مقابلہ دفعہ ۱۶ کے سلسلہ سے کرو)

۳۳۔ جب عہ کی تفصیل عہ کی رقوم میں

بموجب دفعہ ۲۷

جب ن طہ = ن جہم طہ جب طہ

$$\dots \dots \dots \frac{ن (۱ - ن) (۲ - ن)}{۳} \text{جہم} ۳ طہ \text{جب} ۳ طہ + \dots \dots \dots$$

حسب سابق ن طہ کو عہ کے برابر فرض کرنے سے

$$\text{جب عہ} = \frac{\text{عہ}}{طہ} \text{جہم} ۱ طہ \text{جب طہ} - \frac{\text{عہ}}{طہ} \frac{(۱ - \frac{\text{عہ}}{طہ})(۲ - \frac{\text{عہ}}{طہ})}{۳} \text{جہم} ۲ طہ \text{جب} ۲ طہ$$

$$+ \frac{\text{عہ}}{طہ} \frac{(۱ - \frac{\text{عہ}}{طہ})(۲ - \frac{\text{عہ}}{طہ})(۳ - \frac{\text{عہ}}{طہ})}{۵} \text{جہم} ۵ طہ \text{جب} ۵ طہ + \dots \dots \dots$$

$$= \text{عہ جہم} ۱ طہ \text{جب طہ} - \frac{\text{عہ} (عہ - طہ) (عہ - ۲ طہ)}{۳} \text{جہم} ۳ طہ \text{جب طہ} + \dots \dots \dots$$

حسب دفعہ ماقبل طہ کو لا انتہا چھوٹا بنانے اور عہ کو مستقل رکھنے سے

$$\text{جب عہ} = \text{عہ} - \frac{\text{عہ}}{۳} + \frac{\text{عہ}}{۵} - \frac{\text{عہ}}{۷} + \dots \dots \dots \text{تا لانتا ہی}$$

[دفعہ ۱۶ سے مقابلہ کرو]

۳۴۔ دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مانند مس طہ کے لئے

کوئی ایسا سلسلہ نہیں ہے جسکی رقوم کا تسلسل کسی آسان قانون پر مبنی ہو۔
بہر حال ہم مس ط کے لئے ایک سلسلہ ط کی پانچویں قوت تک
معلوم کرینگے۔

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3}{12} - \frac{\text{ط}^4}{5} + \dots}{1 - \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} - \dots}$$

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3}{12} - \dots) [1 - (\frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{ط}^4}{24} + \dots)]^{-1}$$

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3}{12} - \dots) [1 + (\frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{ط}^4}{24} - \dots) + (\frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{ط}^4}{24})^2 + \dots]$$

مسئلہ ثنائی سے

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3}{12} - \dots) [1 + \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} + \dots]$$

ط اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنے سے

$$= (\text{ط} - \frac{\text{ط}^2}{4} + \frac{\text{ط}^3}{12} - \dots) (1 + \frac{\text{ط}^2}{2} + \frac{\text{ط}^4}{24} + \dots)$$

جو اختصار کرنے اور ط سے اوپر کی رقوم چھوڑ دینے سے

$$= \text{ط} + \frac{\text{ط}^3}{12} + \frac{\text{ط}^5}{15}$$

اگرچہ ہم اس قاعدہ سے مس ط سے لئے سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں
معلوم کر سکتے ہیں تاہم یہ سلسلہ بہت جلد دشوار اور تکلیف دہ ہو جاتا ہے۔
۳۵ - دفعات ۳۲ اور ۳۳ میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ زاویہ
زیر بحث میں عنیم قطریوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایسا
نہ ہو تو ط کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے جب ط کی انتہائی قیمت

ایک نہیں ہو سکتی۔

اگر زاویہ کی مقدار درجوں میں دی ہوئی ہو تو ذیل کا عمل اختیار کیا جائے گا۔

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{a}{180} = \frac{b}{90} \text{ یعنی } \frac{a}{180} = \frac{b}{90}$$

$$\text{تب } \text{جیب } \frac{a}{180} = \text{جیب } \frac{b}{90}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{180} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{a}{180} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{a}{180} \right)^6 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{180} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{a}{180} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{a}{180} \right)^6 + \dots \text{ لانا ہی تک}$$

اسی طرح سے

$$\text{جب } \frac{a}{180} = \text{جب } \frac{b}{90}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{180} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{a}{180} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{a}{180} \right)^6 + \dots$$

$$= \frac{a}{180} - \frac{1}{24} \left(\frac{a}{180} \right)^3 + \frac{1}{720} \left(\frac{a}{180} \right)^5 - \dots \text{ لانا ہی}$$

۳۶۔ چھوٹے زاویوں کی جیب اور جیب التمام
دفعات ۳۲ اور ۳۳ کے سلسلوں کی مدد سے چھوٹے زاویوں کی جیب
اور جیب التمام آسانی معلوم ہو سکتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ جب ۱۰° اور جیب ۱۰° کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہو تو

$$\text{چونکہ } 10^\circ = \left(\frac{180}{4} \times \frac{1}{4} \right) \text{ نیم قطری } = \left(\frac{180}{4} \right) \text{ فی}$$

$$\text{ہذا جب } 10^\circ = \frac{180}{4} - \frac{1}{24} \left(\frac{180}{4} \right)^3 + \frac{1}{720} \left(\frac{180}{4} \right)^5 - \dots$$

$$\text{اور حجم } 10 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4 \times 8000} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{4 \times 8000} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^3}{4 \times 8000} \right) + \dots$$

$$50000 \cdot 28281348 \dots = \frac{\pi}{4 \times 8000} \text{ اب}$$

$$50000000 \cdot 23502 \dots = \frac{\pi^2}{4 \times 8000} \text{ اور}$$

$$5000000000 \cdot 113928 \dots = \frac{\pi^3}{4 \times 8000} \text{ اور}$$

پس اعشاریہ کے بارہویں مقام تک

$$50000 \cdot 28281348 = 10 \text{ جب}$$

$$50000000 \cdot 23502 = 10 \text{ اور حجم } 10 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4 \times 8000} \right) + \dots$$

$$5000000000 \cdot 113928 = 10 = 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^3}{4 \times 8000} \right) + \dots$$

$$5999999999825 =$$

۷۔ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت

دفعہ ۳۳ کا سلسلہ کسی مساوات کی اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں بھی بہت کارآمد ہوتا ہے، اس قاعدہ کی بہترین تشریح چند مثالوں سے ہو سکتی ہے۔

مشق ۱۔ اگر $\frac{1329}{1350} = \frac{1}{x}$ جب طہ تو ثابت کرو کہ زاویہ طہ قریباً $\frac{1}{10}$ نکلے مساوی ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ زاویہ طہ جتنا چھوٹا ہوگا جب طہ کی قیمت اتنی ہی ایک کے زیادہ قریب ہوگی۔ اور چونکہ اس مشق میں $\frac{1329}{1350}$ کی قیمت قریباً ۱ کے مساوی ہے اسلئے ظاہر ہے کہ طہ بہت چھوٹا ہے۔

اگر جب طہ کے سلسلہ (دفعہ ۳۳) میں طہ کی تیسری قوت سے بڑی قوتیں

چھوڑ دی جائیں تو $\frac{3}{ط}$

$$\frac{1}{1350} - 1 = \frac{1349}{1350} = \frac{\frac{3}{ط} - ط}{ط} = \frac{3 - ط^2}{ط^2}$$

$$\frac{1}{225} = \frac{4}{1350} = \frac{2}{ط^2}$$

پس $\frac{1}{15} = ط$

یعنی زاویہ مطلوبہ $= \frac{1}{15}$ تقریباً
اگر زیادہ صحیح قیمت معلوم کرنا مقصود ہو تو سلسلہ بالا میں ط کی پانچویں قوت کو بھی شامل کر لینا چاہیئے۔

تب $\frac{1}{1350} - 1 = \frac{\frac{5}{ط} + \frac{3}{ط} - ط}{ط} = \frac{8 - ط^2}{ط^2}$

$\therefore ط^2 - ۲۰ = \frac{۲۰}{1350} = \frac{۲}{۲۲۵}$

حل کرنے سے $ط^2 = 10 \pm \frac{22380}{15}$

$$\frac{5.94488}{15} = \frac{129593312 \dots - 150}{15} = \frac{150032}{215}$$

$\therefore ط = \frac{150014}{15}$ نیم قطری

اس قیمت اور پہلی قیمت کا فرق تقریباً پہلی قیمت کے $\frac{1}{15}$ دیں
حصہ کے مساوی ہے۔

مشق ۲- ذیل کی مساوات کا تقریبی حل معلوم کرو۔

جم $(\frac{11}{3} + ط) = ۴۹$

صریحاً ۴۹، $\frac{1}{3}$ کے تقریباً مساوی ہے اور چونکہ $\frac{1}{3}$ ، جم $\frac{11}{3}$ کی پوری قیمت

ہے اس لئے لازماً طہ کی قیمت بہت چھوٹی ہوگی۔
مساوات مذکورہ اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{1}{4} \text{ جم طہ} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ جب طہ} = ۵۹ = \frac{1}{4} - \frac{1}{111} \dots\dots\dots (۱)$$

پہلی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے طہ کا مربع اور مربع سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا کافی ہوگا۔

تب دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ مساوات

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{111} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ طہ} = ۱ \times \frac{1}{4}$$

$$\text{جس سے طہ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{111} = \frac{\sqrt{3} \times 2}{3 \times 111} = \frac{۳۵۳۶۴۱\dots}{۳۰۰}$$

$$= ۰.۱۱۵۴\dots \text{ نیم قطری}$$

اس سے زیادہ صحیح تقریبی قیمت معلوم کرنے کے واسطے طہ کی تیسری قوت اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کرنا چاہئے۔

اس صورت میں مساوات (۱) ہو جائے گی:

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ طہ} = \frac{1}{111} - \frac{1}{4}$$

$$\text{یعنی طہ} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ طہ} = \frac{1}{111}$$

$$\therefore \text{طہ} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} = \frac{۳۰۳۱۰}{۱۰} = ۰.۱۱۵۰۸۶\dots \text{ نیم قطری}$$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چوتھے مقام تک درست ہے
ہذا زاویہ طہ تقریباً ۰.۱۱۵ نیم قطری یعنی ۴۰ کے مساوی ہے۔

جدولوں کی رو سے درست جواب ۰.۱۱۵۰۷۵ نیم قطری ہے۔

۳۸۔ بظاہر غیر متعین مقادیر کی قیمت معلوم کرنا

اکثر اوقات ہمیں ایسی مقادیر کی قیمت معلوم کرنی پڑتی ہے جو بظاہر غیر متعین ہوتی ہیں۔
فرض کرو کہ

$$\frac{۳ \text{ جب } ط - ۳ \text{ جب } ط}{ط}$$

$$ط (جم ط - جم ۳ ط)$$

کی قیمت معلوم کرنا مطلوب ہے جہاں ط صفر ہے۔
اگر ہم جملہ اندامیں ط کی جگہ صفر رکھیں تو یہ

$$\frac{۳ - ۳}{۰} =$$

جو بظاہر غیر متعین ہے۔

تاہم ط کی تمام قیمتوں کے لئے مذکورہ بالا جملہ

$$\frac{۳ \text{ جب } ط - (۳ \text{ جب } ط - ۳ \text{ جب } ط)}{ط} = \frac{۳ \text{ جب } ط - ۳ \text{ جب } ط}{ط}$$

$$\frac{ط \{جم ط - (جم ۳ ط - جم ۳ ط)\}}{ط} = \frac{ط \{جم ط - جم ۳ ط + جم ۳ ط\}}{ط}$$

$$\frac{جم ط جب ط}{ط} = \frac{جم ط جب ط}{ط} = \frac{۱}{جم ط} \times \frac{جم ط جب ط}{ط}$$

اب ط جتنا چھوٹا ہوگا اتنا ہی $\frac{۱}{جم ط}$ اور $\frac{جم ط جب ط}{ط}$ دونوں کی قیمتیں ایک کے قریب ہوں گی۔

اس لئے جس وقت ط کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے اس وقت
مذکورہ بالا جملہ کی انتہائی قیمت ۱×۱ یعنی ۱ ہو جاتی ہے۔

اس قسم کی رقم کو جبکہ ہم نے ابھی اوپر ذکر کیا ہے غیر متعین رقم کہتے ہیں یہ کہنا شاید

زیادہ درست ہوگا کہ مذکورہ بالا جملہ صرف با دوئی النظر میں غیر متعین ہے۔
 ۳۹۔ جب ط اور ج ط کے سلسلوں کو استعمال کرنے سے اس قسم کے
 بہت سے جملوں کی اصلی قیمت نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہے۔
 اس قاعدہ کی توضیح کے لئے چند مشقیں ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔
 دفعہ ما قبل کی مثال ذیل کی پہلی مشق کی ایک خاص صورت ہے۔
 مشق ۱۔ اگر ط صفر ہو تو ذیل کے جملہ کی قیمت معلوم کر دو

$$\frac{\text{ن جب ط} - \text{جب ن ط}}{\text{ط (ج ط - ج ن ط)}}$$

$$\begin{aligned} & \text{جملہ مذکور} = \frac{\text{ن (ط} - \frac{\text{ط}^2}{\text{ن}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{ن}} - \dots) - (\text{ن ط} - \frac{\text{ن}^2}{\text{ط}} + \frac{\text{ن}^2}{\text{ط}} - \dots)}{\text{ط} \left[(1 - \frac{\text{ط}^2}{\text{ن}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{ن}} - \dots) - (1 - \frac{\text{ن}^2}{\text{ط}} + \frac{\text{ن}^2}{\text{ط}} - \dots) \right]} \\ & = \frac{\text{ن} - \frac{\text{ن}^3}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ن} - \text{ن}^5}{\text{ط}^4} + \text{ط کی بڑی قوتیں}}{\text{ط} \left[\frac{\text{ن}^2 - 1}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ن}^2 - 1}{\text{ط}^2} + \text{ط کی بڑی قوتیں} \right]} \\ & = \frac{\text{ن} - \frac{\text{ن}^3}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ن} - \text{ن}^5}{\text{ط}^4} + \text{ط کی بڑی قوتیں}}{\frac{\text{ن}^2 - 1}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ن}^2 - 1}{\text{ط}^2} + \text{ط کی بڑی قوتیں}} \\ & \text{اگر ط صفر ہو جائے تو یہ رقم} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{ن}}{\text{ط}} = \frac{\text{ن} - 1}{\text{ط}} + \frac{\text{ن} - \text{ن}^3}{\text{ط}^2} =$$

مشق ۲۔ اگر لا صفر ہو جائے تو جملہ

$$\frac{\text{جملہ لا - لا ک (لا + لا) + جب لا - لا}}{\text{لا - لا (لا + لا)}}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n})$$

$$\text{اور } 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{m} \quad (\text{دفعات ۵ اور ۸})$$

$$1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) + \dots\dots\dots$$

$$(1 + \frac{1}{n}) - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) + \dots\dots\dots$$

$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \frac{1}{p}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{m} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \frac{1}{p}} = \dots\dots\dots$$

اگر لا صفر ہو تو یہ = + = ۰

مشق ۳۔ اگر لا صفر ہو جائے تو

(مس لا) کی قیمت معلوم کرو

اگر لا صفر ہو جائے تو یہ رقم (صفر) ص ۱ کی شکل اختیار کر لیتی ہے

$$\text{نیز یہ رقم} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \dots\dots\dots \right) \frac{1}{n}$$

(دفعہ ۳۲)

اب بموجب نتیجہ صریح دفعہ ۲ (۱ + ۱/۳) لا کی قیمت نو ہوتی ہے جب لا صفر ہو

$$\text{لہذا رقم مذکور} = \frac{11}{3} = نو = ۱$$

جلد زیر بحث کی قیمت اس کا لوکار رقم معلوم کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتی ہے۔

امثلہ ۵

$$۱۔ \text{ اگر جب } \frac{1}{1.13} = \frac{1}{1.13} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

ط تقریباً نیم قطریوں کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جو ۴۴° ۲۴' میں ہیں۔

۲۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۸۶۳}{۸۶۴}$ تو ثابت کرو کہ

ط تقریباً ۴۴° ۲۴' کے برابر ہے۔

۳۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۵۰۴۵}{۵۰۴۶}$ تو ثابت کرو کہ

زاویہ ط تقریباً ۵۸° ۱' کے برابر ہے۔

۴۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۲۱۶۵}{۲۱۶۶}$ تو ثابت کرو کہ

زاویہ ط تقریباً ۱° ۳' کے برابر ہے۔

۵۔ اگر $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{۱۹۴۹۳}{۱۹۴۹۴}$ تو ثابت کرو کہ

ط کی تقریبی قیمت ۱° ہے۔

۶۔ اگر $\frac{\text{مس}}{\text{ط}} = \frac{۱}{۱۵}$ ، تو ط کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اگر لاصغر ہو جائے تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ $\frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}}$

۸۔ $\frac{\text{لا}}{\text{۱} - \text{جم م لا}}$

۹۔ $\frac{\text{جب لا}}{\text{جب ب لا}}$

۱۰۔ $\frac{\text{مس لا} - \text{جب لا}}{\text{جب لا}}$

۱۱۔ $\frac{\text{مس لا} - ۲ \text{ جب لا}}{\text{لا}}$

۱۲۔ $\frac{\text{سم لا}}{\text{سم ب لا}}$ (نوٹ) سم سے مراد ہم الجیب یعنی جیب معلوم ہے)

۱۳۔ $\frac{\text{م جب لا} - \text{جب م لا}}{\text{م (جم لا} - \text{جم م لا)}}$

- ۱۴- $\frac{\text{ب}^2 \text{جب} \text{لا} - \text{ب}^2 \text{جب} \text{ب} \text{لا}}{\text{ب}^2 \text{مس} \text{لا} - \text{ب}^2 \text{مس} \text{ب} \text{لا}}$
- ۱۵- $\frac{\text{ب}^2 \text{جب} \text{لا} - \text{ب}^2 \text{جب} \text{ب} \text{لا}}{\text{ب}^2 \text{مس} \text{لا} - \text{ب}^2 \text{مس} \text{ب} \text{لا}}$
- ۱۶- $\frac{\text{لا} \text{لوک} \text{و} (1 + \text{لا})}{1 - \text{جم} \text{لا}}$
- ۱۷- $\frac{\text{لا} - 1 + \text{لوک} \text{و} (1 - \text{لا})}{\text{جب}^2 \text{لا}}$
- ۱۸- $\frac{\text{لا} + 2 \text{جب} \text{لا} - \text{جب}^3 \text{لا}}{\text{لا} + \text{مس} \text{لا} - \text{مس}^2 \text{لا}}$
- ۱۹- $\frac{\text{جب} \text{لا} + \text{جب}^2 \text{لا} - \text{لا}^2}{\text{لا}^5}$
- ۲۰- $\frac{\text{جب}^2 \text{ن} \text{لا} - \text{جب}^2 \text{م} \text{لا}}{1 - \text{جم} \text{ن} \text{لا}}$
- ۲۱- $\frac{1}{\text{لا}^2} \left[\frac{\text{جب} \text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{و}^2 - \text{و}^2}{\text{لا}^2} - 2 \right]$
- ۲۲- $\frac{\text{جب}^2 \text{م} \text{ن} \text{لا} - \text{جب} \text{م} \text{لا} \text{جب} \text{ن} \text{لا}}{(1 - \text{جم} \text{م} \text{لا}) (1 - \text{جم} \text{ن} \text{لا})}$
- ۲۳- $\frac{3 \text{جب} \text{لا} - \text{جب}^3 \text{لا}}{\text{لا} - \text{جب} \text{لا}}$
- ۲۴- $\frac{(\text{جب} \text{لا} - 2 \text{جب} \frac{\text{لا}}{2})^2 - (1 - \text{جم} \text{لا})^2}{\text{جب} \text{لا} \text{جب}^2 \text{لا} - 8 \text{جم} \text{لا} \text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{2} - \frac{1}{4} \text{جم} \text{جب} \text{لا}}$
- ۲۵- $\frac{\text{لا} - \text{ب}^2}{\text{لا}}$
- ۲۶- $\frac{3}{\text{لا}} \left(\frac{\text{مس} \text{لا}}{\text{لا}} \right)$

$$۲۷ - \left(\text{جم } \frac{۱۱}{۴} + \text{جب } \frac{۳}{۴} \right) \frac{۱}{۱۱}$$

اگر $\frac{۱۱}{۴}$ کے مساوی ہو تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو:

$$۲۸ - \frac{(\text{جم } ۱۱ + \text{جب } ۲ + \text{جم } ۳)}{(\text{جب } ۲ + \text{جم } ۲ - \text{جب } ۳)}$$

$$۲۹ - (\text{جب } ۱) \text{ مس } ۱$$

$$۳۰ - \text{قط } ۱ - \text{مس } ۱$$

اگر n لا انتہا بڑا ہو تو ذیل کے جلوں کی قیمتیں معلوم کرو:

$$۳۱ - (\text{جم } \frac{۱}{n}) \quad ۳۲ - (\text{جم } \frac{۱}{n}) \quad ۳۳ - (\text{جم } \frac{۱}{n})$$

$$۳۴ - \text{اگر } n < ۱ \text{ اور } \frac{۱}{n} = \frac{۳}{۴} \text{ تقریباً تو ثابت کرو کہ (جب } \frac{۱}{n} \text{) کی تقریبی قیمت}$$

$$\text{ہوگی } \frac{(n-1) + (n+1) \text{ جب } \frac{۱}{n}}{(n+1) + (n-1) \text{ جب } \frac{۱}{n}}$$

$$۳۵ - \text{اگر } b \text{ کی قیمت انتہائی صورت میں } c \text{ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{c \text{ جب } b - b \text{ جب } c}{c \text{ جم } b - b \text{ جم } c} = \text{مس } (c - \text{مس } a)$$

$$۳۶ - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \text{مس } \frac{1}{a+b}$$

اور اس سے حاصل کرو کہ اگر ایک قائم الزاویہ مثلث Δ ب ج کا زاویہ

ج قائم ہو اور ج Δ ب کا پانچ گنا ہو تو زاویہ Δ زاویہ قائمہ کے $\frac{1}{5}$

سے بقدر ۳۶° کے بڑا ہو گا جب موخر الذکر اعداد کی صحت کو قریب ترین

تماز تک ملحوظ رکھا جائے۔

۳۷۔ ر اور ب کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ جلد ۱ جب ۱۰ ب جب ۲۰ لا کی قیمت ایک چھوٹے زاویہ لا کے نیمقطریوں کی تعداد کے اتنی قریب ہو جتنی کہ ممکن ہے۔

۳۸۔ اگر $\alpha = \lambda$ ۔ ر جب ۱۰ جہاں ر ایک نہایت چھوٹی مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{\lambda}{p} = \text{مس } \frac{\lambda}{p} (1 - r + r \text{ جب } \frac{\lambda}{p})$$

اور $\text{مس } \frac{\lambda}{p} = \text{مس } \frac{\lambda}{p} (1 + r + r \text{ جب } \frac{\lambda}{p})$
جہاں ر کی دو سے بڑی قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۳۹۔ اگر مساوات جب (سہ - طہ) = جب سہ جم عہ میں طہ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ اس کی تقریبی قیمت

$$2 \text{ مس سہ جب } \frac{\alpha}{p} (\text{مس } \frac{\alpha}{p} \text{ جب } \frac{\alpha}{p})$$

ہوگی۔

۴۰۔ اگر جب فہ کی قیمت سے یہ معلوم ہو کہ زاویہ فہ ۱۵ سے بڑا نہیں ہے تو ثابت کرو کہ اس کی قیمت اور کسر

$$28 \text{ جب } 2 \text{ فہ} + \text{جب } 4 \text{ فہ}$$

$$12 (3 + 2 \text{ جب } 2 \text{ فہ})$$

کی قیمت میں تفاوت کے نیمقطریوں کی تعداد سے کم ہے۔

۴۱۔ مشق۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$8 - \alpha - 2 \lambda - 2 \lambda + 1 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

کی اصلیں جم $\frac{\pi}{2}$ ، جم $\frac{\pi}{2}$ ، جم $\frac{\pi}{2}$ ہیں۔

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{1}{۲} = \frac{\pi ۵}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۳}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi}{۲}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{1}{۳} = -\frac{\pi}{۲} \text{ جم} - \frac{\pi ۵}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۵}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۳}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۳}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi}{۲} \text{ جم}$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{۸} = \frac{\pi ۵}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۳}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi}{۲} \text{ جم}$$

پہا طریقہ - فرض کرو کہ ما = جم طہ + خر جب طہ، جہاں طہ کی قیمت
ذیل کی مقادیر میں سے کوئی ایک ہے

$$\frac{\pi ۱۳}{۲}, \frac{\pi ۱۱}{۲}, \frac{\pi ۹}{۲}, \pi, \frac{\pi ۵}{۲}, \frac{\pi ۳}{۲}, \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{تب ما} = \text{جم} طہ + \text{خر جب طہ} = ۱ -$$

$$\text{یعنی (ما+۱) (ما-ما+ما-ما+ما-ما+۱) = ۰}$$

$$\text{اب اصل ما} = -۱ \text{ طہ کی قیمت } \pi \text{ کے متناظر ہے۔}$$

پس مساوات

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{1}{۸} = \frac{\pi ۵}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi ۳}{۲} \text{ جم} + \frac{\pi}{۲} \text{ جم}$$

کی اصلیں جم طہ + خر جب طہ ہیں جہاں طہ کی قیمت مقادیر ذیل میں
سے کوئی ایک ہے

$$\frac{\pi ۱۳}{۲}, \frac{\pi ۱۱}{۲}, \frac{\pi ۹}{۲}, \frac{\pi ۵}{۲}, \frac{\pi ۳}{۲}, \frac{\pi}{۲}$$

$$۲ \text{ لا کو ما} + \frac{1}{۲} \text{ کے مساوی رکھو}$$

$$\text{تب } ۲ \text{ لا} = \frac{1}{۲} + \text{ما} = \text{جم طہ} + \text{خر جب طہ} + \text{جم طہ} + \text{خر جب طہ}$$

$$= \text{جم طہ} + \text{خر جب طہ} + \text{جم طہ} - \text{خر جب طہ} = ۲ \text{ جم طہ}$$

$$\text{پس ما} + \frac{1}{۲} = \frac{1}{۲} - (\frac{1}{۲} + \text{ما}) = ۲ - ۲ \text{ لا} = ۰$$

$$\text{اور (ما} + \frac{1}{۲}) = (\frac{1}{۲} + \text{ما}) \{ ۳ - (\frac{1}{۲} + \text{ما}) \} = ۸ \text{ لا} - ۶$$

مساوات (۵) کو ماپ پر تقسیم کرنے سے

$$0 = 1 - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{1} + \frac{1}{6}$$

یعنی ۸ لا - ۴ لا - ۴ لا + ۱ = ۰ (۶)

اس مساوات کی اصلیں

$$\text{جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}$$

ہیں اور چونکہ

$$\text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

اس لئے مساوات (۶) کی اصلیں

$$\text{جم } \frac{\pi}{2}, \text{ جم } \frac{\pi}{2}, \text{ اور جم } \frac{\pi}{2} = \text{جم } \frac{\pi}{2} -$$

تب صریحاً

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2} + \text{جم } \frac{\pi}{2}$$

دوسرا طریقہ

$$\text{ساوات (جم طہ + خر جب طہ)} = 1 - \dots \dots \dots (۷)$$

یعنی جم طہ + خر جب طہ = ۱ -

طہ کی مندرجہ ذیل قیمتوں میں سے ہر ایک سے پوری ہوتی ہے

$$(۸) \dots \dots \dots \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

اگر ہم جب طہ کی بجائے ج اور جم طہ کی بجائے م لکھیں اور مساوات (۷) کو

مسئلہ شنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

۴ + ۷م ج - ۲۱م ج - ۲۵م ج + ۳۵م ج + ۲۱م ج - ۷م ج - ۴م ج = ۱
اس مساوات کی دونو جانبوں کے حقیقی حصوں کو برابر کرنے سے

$$۴ - ۲۱م ج + ۳۵م ج - ۷م ج = ۱$$

چونکہ ج = ۱ - ۴، اس لئے ظاہر ہے کہ زدو یا (۸) میں سے ہر ایک کی جیب التمام ذیل کی مساوات کو پورا کرتی ہے -

$$۶۴م - ۱۱۲م + ۵۶م - ۷م + ۱ = ۰ \dots \dots \dots (۹)$$

$$(۱ + ۴م) - ۲م - ۲م - ۴م + ۱ = ۰ \dots \dots \dots (۱۰)$$

لیکن

$$جم = ۲ - ۱، جم = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}، جم = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$$

$$اور جم = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$$

اس لئے مساوات (۱۰) کی اصلیں

$$۱ - جم = \frac{۲}{۲}، جم = \frac{۲}{۲}، جم = \frac{۲}{۲}$$

ہیں جہاں آخر کی تین اصلیں دو دفعہ آتی ہیں -

$$اس لئے جم = \frac{۲}{۲}، جم = \frac{۲}{۲}، جم = \frac{۲}{۲}$$

$$مساوات ۸م - ۲م - ۴م + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ہیں اور یہ مساوات وہی ہے جو مساوات (۶) ہے -

باب مابعد میں دفعہ ۹م کی مساوات (۲) میں ن کی بجائے ۷ لکھنے

سے بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے -

تیسرا طریقہ -

اگر زاویوں کی کم تعداد کو شریک کیا جائے تو مساوات (۶) خیالی مقادیر کے

استعمال کے بغیر بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔
 فرض کرو کہ طہ زوایا ۷ (۸) میں سے کسی زاویہ کو تعبیر کرتا ہے
 یعنی ۷ طہ، ۸ کا کوئی طاق ضعف ہے۔

∴ جم ۴ طہ = جم ۳ طہ

پس اگر جم طہ کی بجائے ص لکھیں تو

$$۲ \{ ۱ - ۴ - ۸ \} - ۱ = \{ ۳ - ۴ - ۸ \}$$

$$\text{یعنی } ۸ - ۴ - ۸ = ۱ + ۳ - ۴$$

$$= ۸ - ۴ + ۳ - ۱ = ۱$$

$$= (۱ + ۳ - ۴ - ۸) (۱ + ۳ - ۴ - ۸)$$

لہذا طریقہ دوم کے عمل کے بموجب

$$\text{مساوات } ۸ - ۴ - ۴ - ۱ = ۱$$

کی اصلیں جم $\frac{۱۱}{۲}$ ، جم $\frac{۱۱}{۲}$ اور جم $\frac{۱۱}{۲}$ ہیں۔

۴۱۔ دفعہ ماقبل کی مدد سے ہم ایک ایسی مساوات حاصل کر سکتے ہیں
 جس کی اصلیں

$$\text{قط } \frac{۱۱}{۲}، \text{قط } \frac{۱۱}{۲}، \text{قط } \frac{۱۱}{۲}$$

ہوں۔

گذشتہ دفعہ کی مساوات (۶) میں $\frac{۱}{۱۱}$ کو $\frac{۱}{۱۱}$ کے اور
 بناویں لا کو $\frac{۱}{۱۱}$ کے برابر فرض کر تب فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے
 کہ

$$\text{قط } \frac{۱۱}{۲}، \text{قط } \frac{۱۱}{۲}، \text{قط } \frac{۱۱}{۲}$$

مسادات $\frac{9}{16} - \frac{2}{4} - \frac{2}{16} + 1 = 0$ کی اصلیں ہیں یا مسادات کو
ناطق بنانے سے $2 - 22 + 80 - 64 = 0$ (۱)
کی اصلیں ہیں۔

اب $1 + 1$ کے برابر فرض کر دو تب چونکہ قطر طہ = $1 + 1$ مس طہ
اسلئے

$$\frac{2}{2} \text{ مس } 2, \frac{2}{2} \text{ مس } 2, \frac{2}{2} \text{ مس } 2$$

$$\text{مسادات } (1+1) - 22 + (1+1) + 80 - (1+1) = 0$$

$$\text{یعنی } 1 - 21 + 35 - 1 = 0 \text{ (۲) کی اصلیں ہیں۔}$$

مسادات (۲) براہ راست بھی آسانی سے حاصل ہو سکتی ہے۔
کیونکہ اگر طہ ذیل کے زاویوں

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

میں سے کسی ایک کو تغیر کرے تو مس ۷ طہ =

یعنی (اگر مس طہ کو ت سے تغیر کیا جائے تو دفعہ ۳۰ کی رو سے

$$1 - 21 + 35 - 1 = 0$$

$$1 - 21 + 35 - 1 = 0$$

$$1 - 21 + 35 - 1 = 0 \text{ (۳)}$$

لیکن چونکہ مس $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ، مس $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ، مس $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ، مس $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{اور مس } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

اسلئے مسادات (۳) کی اصلیں

$$1 - 21 + 35 - 1 = 0$$

ہیں۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

مس^۲ $\frac{۲۲}{۱۱}$ ، مس^۲ $\frac{۲۳}{۱۱}$ ، مس^۲ $\frac{۲۴}{۱۱}$ ، مس^۲ $\frac{۲۵}{۱۱}$ ، مس^۲ $\frac{۲۶}{۱۱}$ ہیں۔ [نوٹ۔ دفعہ ۳۰ کی مساوات (۳) سے شروع کرو]
ثابت کرو کہ

$$۹۔ \text{مس}^۲ \frac{۲۲}{۱۱} + \text{مس}^۲ \frac{۲۳}{۱۱} + \text{مس}^۲ \frac{۲۴}{۱۱} + \text{مس}^۲ \frac{۲۵}{۱۱} + \text{مس}^۲ \frac{۲۶}{۱۱} = ۱۵$$

$$۱۰۔ \text{قط}^۲ \frac{۲۲}{۱۱} + \text{قط}^۲ \frac{۲۳}{۱۱} + \text{قط}^۲ \frac{۲۴}{۱۱} + \text{قط}^۲ \frac{۲۵}{۱۱} + \text{قط}^۲ \frac{۲۶}{۱۱} = ۶۰$$

$$۱۱۔ \text{جم} \frac{۲۲}{۱۳} + \text{جم} \frac{۲۳}{۱۳} + \text{جم} \frac{۲۴}{۱۳} = \frac{۱ - \sqrt{۱۳}}{۴}$$

$$۱۲۔ \text{جم} \frac{۲۲}{۱۳} + \text{جم} \frac{۲۳}{۱۳} + \text{جم} \frac{۲۴}{۱۳} = \frac{۱ - \sqrt{۱۳}}{۴}$$

$$۱۳۔ \text{جم} \frac{۲۲}{۱۵} + \text{جم} \frac{۲۳}{۱۵} + \text{جم} \frac{۲۴}{۱۵} + \text{جم} \frac{۲۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ جب $\frac{۲۲}{۱۳}$ ذیل کی مساوات کی ایک اصل ہے

$$۲۴ \text{ لا}^۲ - ۸۰ \text{ لا} + ۲۴ \text{ لا}^۲ - ۱ = ۰$$



باب چہارم

کسی زاویہ کے اضلاع کی جیوب اور جیوب التمام کے پھیلاؤ

اور جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں

پہلی خواندگی کے وقت طالب علم دفعہ ۴۸ سے باب ہذا کے اختتام تک بچھڑ سکتا ہے۔
۴۲۔ اس باب میں پہلے ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح سے کسی زاویہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کی تفصیلیں اس زاویہ کے اضلاع کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کی جاسکتی ہیں اور پھر یہ بتائینگے کہ کس طرح سے ایک زاویہ کے کسی ضعیف کی جیوب اور جیوب التمام کو زاویہ مذکورہ کی جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کے سلسلوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

اس باب میں ن سے ہر جگہ ایک مثبت صحیح عدد مراد لی جائیگی۔
۴۳۔ فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{جم ط} + \text{خ جب ط}$$

$$(\text{جم ط} - \text{خ جب ط})$$

$$\text{پس لا} = \frac{\text{جم ط} + \text{خ جب ط}}{\text{جم ط} - \text{خ جب ط}}$$

$$= \text{جم ط} - \text{خ جب ط}$$

$$\text{اس لئے لا} + \frac{1}{\text{لا}} = \text{جم ط}$$

اور لا - لا = $\frac{1}{لا}$ ۲ خ جب ط

نیز ڈی مائیرے کے مسئلہ سے ثابت ہے کہ

لا = جم ن ط + خ جب ن ط

لا = جم ن ط - خ جب ن ط

لہذا لا = $\frac{1}{لا}$ + ۲ جم ن ط

اور لا - لا = $\frac{1}{لا}$ ۲ خ جب ن ط

۴۴ - جم ن ط کی تفصیل ط کے اضائف کی جیوب التمام کی رقوم میں معلوم کرو۔

اس جگہ ن سے مراد کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

دفعہ مابقی سے ظاہر ہے کہ

(۲ جم ط) = (لا + $\frac{1}{لا}$) ن

= لا ن + ن لا - لا + $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$

+ $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ن + $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$

= لا ن + ن لا - لا + $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$

+ $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ن + $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$ (۱)

پہلی رقم کو آخری رقم کے ساتھ دوسری رقم کو آخر کی طرف سے دوسری رقم کے ساتھ اور علیٰ ہذا القیاس لینے سے

(۲ جم ط) = (لا + $\frac{1}{لا}$) ن + (لا - $\frac{1}{لا}$) ن + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$

+ $\frac{1}{لا}$ ن (۱-ن) $\frac{1}{لا}$ + $\frac{1}{لا}$ ۲ - لا ن + + $\frac{1}{لا}$

لیکن دفعہ ما قبل کی رو سے

$$\text{لا} \text{ ن} = \frac{1}{2} + \text{جم ن ط}$$

$$\text{اور لا} \text{ ن} - ۲ = \frac{1}{2} + \text{جم} (۲ - \text{ن}) \text{ ط}$$

وغیرہ وغیرہ

$$\text{پس } ۲ \text{ جم ن ط} = ۲ \text{ جم ن ط} + \text{ن} \times ۲ \text{ جم} (۲ - \text{ن}) \text{ ط}$$

$$+ \frac{\text{ن} (۱ - \text{ن})}{۲} \times ۲ \text{ جم} (۲ - \text{ن}) \text{ ط} + \dots$$

یعنی ۲-۱ جم ن ط = جم ن ط + ن جم (۲ - ن) ط + $\frac{\text{ن} (۱ - \text{ن})}{۲} \times ۲ \text{ جم} (۲ - \text{ن}) \text{ ط} + \dots$ (۲)
اگر ن طاق ہو تو مساوات (۱) کے بائیں جانب رقوم کی تعداد
جفت ہوگی۔ اس لئے دو رقوموں کے زوج پورے ہو جائیں گے۔
اور کوئی رقم ایسی نہ بیگی۔ اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ آخری
رقم میں جم ط شامل ہوگا۔

لیکن اگر ن کوئی جفت عدد ہو تو مساوات (۱) کی بائیں جانب
کے رقوم کی تعداد طاق ہوگی۔ اس لئے جملہ ازواج پورے
کرنے کے بعد ایک رقم بچ جائیگی جس میں لا شامل نہیں ہوگا۔
اس کو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم سلسلہ
(۲) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم

$$\frac{\frac{1 + \text{ن}}{۲}}{\frac{1 - \text{ن}}{۲}}$$

میں آخری رقم + $\frac{1}{\text{لا}}$ ہوگی۔

نیز چونکہ $\frac{1}{\text{لا}}(1 - \frac{1}{\text{لا}}) = \frac{1}{\text{لا}}$

اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$\frac{1}{\text{لا}}(1 - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} = \text{لا} - \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا} - 1)}{2} \times \frac{1}{\text{لا}} - \dots - \frac{1}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا}(\text{لا} - 1)}{2} + \frac{1}{\text{لا}}$$

$$- \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}} \dots \dots \dots (2)$$

$$= (\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} - (\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} + (\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} - \dots - (\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}$$

$$= 2 \times \text{لا} - 2 \times \text{لا} + 2 \times \text{لا} - \dots - 2 \times \text{لا} + 2 \times \text{لا} = 2 \times \text{لا} - 2 \times \text{لا} + 2 \times \text{لا} - \dots - 2 \times \text{لا} + 2 \times \text{لا}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{لا}}(1 - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} = \text{لا} - \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{لا}(\text{لا} - 1)}{2} \times \text{لا} - \dots - \frac{1}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا}(\text{لا} - 1)}{2} + \frac{1}{\text{لا}} \dots \dots \dots (3)$$

چونکہ لا جفت ہے اس لئے مساوات (۲) کے بائیں جانب کی رقموں کی تعداد طاق ہوگی۔ لہذا درمیانی رقم میں لا شامل نہ ہوگا، اسکو ۲ پر تقسیم کرنے سے جو رقم حاصل ہوگی وہی رقم مساوات (۳) کی آخری رقم ہوگی۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری رقم $\frac{1}{\text{لا}}(1 - \frac{1}{\text{لا}}) \times \text{لا} = \text{لا} - \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}}$ ہوگی۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے

تب سلسلہ (۱) میں آخری رقم $\frac{1}{n}$ ہو گی۔

نیز چونکہ $n = 2 \times n - 1$ \times $n - 1 = (1 - \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n}$ اس لئے مساوات (۱) حسب ذیل ہو جاتی ہے۔

$$2 \times n - 1 = (1 - \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$= \frac{n-1}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^3}$$

$$= \frac{n-1}{n^3} - \frac{n-1}{n^4} = \frac{n-1}{n^4} \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{n-1}{n^4} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \frac{(n-1)^2}{n^5}$$

$$+ \frac{n-1}{n^5} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{(n-1)^2}{n^5} + \frac{(n-1)^2}{n^6} = \frac{(n-1)^2}{n^6} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{(n-1)^2}{n^6} \left(\frac{n+1}{n} \right) = \frac{(n-1)^2 (n+1)}{n^7}$$

اب بموجب دفعہ (۳۳) $\frac{1}{n} = 2 \times n - 1$ جب ن طہ

$$\frac{1}{n} = 2 \times n - 1 \text{ جب } (2 - n) \text{ طہ}$$

لہذا مساوات (۴) ہو جاتی ہے:

$$2 \times n - 1 = (1 - \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$$

$$= \frac{n-1}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^3}$$

یعنی $2 \times n - 1 = (1 - \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$ جب ن طہ۔ ن جب (۲-ن) طہ

$$+ \frac{n-1}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^3} \text{ جب } (2 - n) \text{ طہ} \dots \dots \dots (5)$$

چونکہ صورت ہذا میں ن طاق ہے اس لئے مساوات (۴) کی بائیں جانب تعدادِ رقوم جفت ہوگی۔ پس کل رقوم دو دو رقوموں کے ازواج میں پوری تقسیم ہو جائیں گی اور کوئی رقم اکیلی نہ بچے گی، لہذا (۵) کی آخری رقم میں جب طہ شامل ہوگا۔

یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ آخری رقم (۱) - $\frac{۱-۵}{۲}$ جب طہ

ہوگی۔
۴-۲- مشق ۱- جب طہ کی تفصیل طہ کے اضلاع کی جیوب اتمام کی رقوم میں معلوم کرو۔
یہ معلوم ہے کہ

$$۲ \times ۲ \text{ جب طہ } = (۱ - \frac{۱}{۲})$$

$$= ۱ - ۲ \times ۱ + ۱۵ - ۲ \times ۱۵ + \frac{۱}{۲} \times ۶ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

$$\text{اس لئے } ۲ \times ۲ \text{ جب طہ } = (۱ + \frac{۱}{۲}) - ۶ - (۱ + \frac{۱}{۲}) + ۱۵ + (۱ - \frac{۱}{۲}) - ۲۰$$

$$= ۲ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } - ۲ \times ۶ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } + ۲ \times ۱۵ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } - ۲۰$$

$$\therefore ۲ \times ۲ \text{ جب طہ } = ۲ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } - ۶ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } + ۱۵ \text{ جم } ۲ \text{ طہ } - ۱۰$$

مشق ۲- جب طہ کی تفصیل طہ کے اضلاع کی جیوب کی رقوم میں معلوم کرو

ظاہر ہے کہ $۲ \times ۲ \text{ جب طہ } = (۱ - \frac{۱}{۲})$

$$= ۱ - ۲ \times ۱ + ۲۱ - ۲ \times ۳۵ + ۳۵ - \frac{۱}{۲} \times ۲۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

$$= (۱ - \frac{۱}{۲}) - ۲ - (۱ - \frac{۱}{۲}) + ۲۱ + (۱ - \frac{۱}{۲}) - ۳۵ - (۱ - \frac{۱}{۲})$$

∴ ۲۰ خ جیب طہ = ۲ خ جیب طہ - ۴ خ جیب طہ - ۵ خ جیب طہ

+ ۲۱ خ جیب طہ - ۳۵ خ جیب طہ

∴ ۲۰ خ جیب طہ = جیب طہ - ۴ خ جیب طہ + ۲۱ خ جیب طہ - ۳۵ خ جیب طہ

مشق ۳ - جم طہ جیب طہ کی تفصیل طہ کے اضعاف کی جیوب کی رقم میں معلوم کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ ۲ جم طہ = (لا + $\frac{1}{لا}$) اور ۴ خ جیب طہ = (لا - $\frac{1}{لا}$)
اسلئے ۲۰ خ جیب طہ = (لا - $\frac{1}{لا}$) (لا - $\frac{1}{لا}$)

$$= [لا - ۱۰ + لا - \frac{1}{لا} + \frac{1}{لا} - ۲] [لا - \frac{1}{لا} + ۲ - \frac{1}{لا}]$$

$$= (لا - \frac{1}{لا}) (لا - \frac{1}{لا}) - ۲ (لا - \frac{1}{لا}) + ۴ (لا - \frac{1}{لا}) - ۱۰ (لا - \frac{1}{لا}) +$$

$$+ ۵ (لا - \frac{1}{لا}) - ۲۰ (لا - \frac{1}{لا})$$

لہذا حسب سابق

- ۲ جم طہ جیب طہ = جیب طہ - ۱۲ طہ - ۲ جیب طہ - ۱۰ طہ - ۴ جیب طہ - ۸ طہ

+ ۱۰ جیب طہ + ۶ طہ + ۵ جیب طہ - ۲۰ جیب طہ - ۲ طہ

امثلہ ۷

ثابت کرو کہ

$$۱ - جیب طہ = \frac{1}{14} [جیب طہ - ۵ جیب طہ + ۱۰ جیب طہ]$$

$$۲ - جم طہ = \frac{1}{254} [جم طہ + ۹ طہ + ۹ جم طہ + ۳۶ طہ + ۵ جم طہ + ۸۴ جم طہ + ۳ طہ + ۱۲۶ جم طہ]$$

$$۳ - جم طہ = \frac{1}{512} [جم طہ + ۱۰ جم طہ + ۸ طہ + ۴ جم طہ + ۲۵ طہ + ۶ جم طہ + ۱۲۰ جم طہ + ۲ طہ + ۲۱۰ جم طہ + ۱۲۶ طہ]$$

$$۴- \text{جب طہ} = \frac{۱}{۱۲۸} [\text{جم ۸ طہ} - \text{جم ۶ طہ} + \text{جم ۲۸ طہ} - \text{جم ۵۶ طہ} + \text{جم ۲۵ طہ}]$$

$$۵- \text{جب طہ} = \frac{۱}{۲۵۶} [\text{جب ۹ طہ} - \text{جب ۷ طہ} + \text{جب ۱۷ طہ} + \text{جب ۳۶ طہ}]$$

$$- ۸۴ \text{ جب ۳ طہ} + ۱۲۶ \text{ جب طہ}$$

$$۶- ۲ \text{ جب طہ} = \text{جم ۶ طہ} - \text{جم ۲ طہ} - \text{جم ۲ طہ} + ۲$$

$$۷- ۲ \text{ جب طہ} = \text{جم طہ} - \text{جب ۷ طہ} - \text{جب ۳ طہ} + \text{جب ۵ طہ} + \text{جب ۵ طہ}$$

$$۸- ۲ \text{ جب طہ} = \text{جم طہ} - \text{جب ۱۱ طہ} + \text{جب ۵ طہ} + \text{جب ۷ طہ} - \text{جب ۷ طہ} - \text{جب ۵ طہ}$$

$$- ۲۲ \text{ جب ۳ طہ} - ۱۴ \text{ جب طہ}$$

$$۳۸- \frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} \text{ کی تفصیل جم طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ}$$

میں معلوم کرو۔

اگر لا > اتو

$$\frac{\text{جب طہ}}{۲- \text{لا جم طہ} + ۲} = \text{جب طہ} + \text{لا جب ۲ طہ} + \text{لا جب ۳ طہ}$$

$$+ \dots + \text{لا} - \text{لا جب ن طہ} + \dots + \text{لا لا تا ہی} \dots (۱)$$

اس کو ثابت کرنے کے لئے دونوں جانب ۱- ۲ لا جم طہ + لا^۲ سے ضرب دو تو دائیں طرف کا رکن جب طہ کے مساوی ہوگا۔

اس کا باضابطہ ثبوت باب ہشتم میں دیا جائے گا۔

مساوات (۱) میں لا^۲ کے سروں کو برابر کرنے سے

$$\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا} - \text{لا سر} [۲- \text{لا جم طہ} + \text{لا}] \text{ کی تفصیل میں}$$

$$= \text{لا} - \text{لا سر} [۱- \text{لا (جم طہ - لا)}] \text{ کی تفصیل میں}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(۲-ن)(۳-ن)}{۲} (۲ جم طہ) - ۲-۵ \\
& - \frac{(۳-ن)(۴-ن)(۵-ن)}{۳} (۲ جم طہ) - ۲-۵ + \dots \\
& - [(۲ جم طہ) - ۲-۵ - (۳-ن)(۲ جم طہ) + \frac{(۴-ن)(۵-ن)}{۲} (۲ جم طہ) - ۲-۵] \\
& = (۲ جم طہ) - ۲-۵ - [(۳-ن) + \frac{(۲-ن)(۳-ن)}{۲}] (۲ جم طہ) - ۲-۵ \\
& - [\frac{(۳-ن)(۴-ن)(۵-ن)}{۳} + \frac{(۴-ن)(۵-ن)}{۲}] (۲ جم طہ) - ۲-۵ + \dots \\
& \text{یعنی بالآخر } ۲ جم ن طہ = (۲ جم طہ) - ۲-۵
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ن(۳-ن)}{۲} (۲ جم طہ) - ۲-۵ \\
& - \frac{ن(۴-ن)(۵-ن)}{۳} (۲ جم طہ) - ۲-۵ + \dots (۲) \\
& \text{یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر ن طاق ہو تو آخری رقم} \\
& (۱-۵) \frac{۲-۵}{۲} ن (۲ جم طہ) ہوگی اور اگر ن جفت ہو تو آخری رقم \\
& (۱-۵) \frac{۲-۵}{۲} \times ۲ ہوگی۔
\end{aligned}$$

۵۰۔ جب ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے
سلسلہ میں معلوم کرو۔
حسب دفعہ ۴۸

$$\text{جب ن طہ} = \text{لا} - \text{ا کاسر} [۱-۲ لا جم طہ + لا] \text{ کی تفصیل میں}$$

$= \text{لا}^n - \text{کا سر} [1 + \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})] - \text{کی تفصیل میں}$
 $= \text{لا}^n - \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں} [1 - \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ}) + \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 - \dots + (1 - \text{لا})^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots]$ (۱)
 صورت اول - فرض کرو کہ n طاق ہے یعنی $n = 1$ جفت ہے تب ظاہر ہے کہ سلسلہ بالا کی صرف انہی رقوم سے $\text{لا}^n - \text{کا کوئی سر}$ حاصل ہو سکتا ہے جن میں r کی قیمت $\frac{1}{2} - n$ یا اس سے زیادہ ہے لہذا صورت موجودہ میں

$$\frac{\text{جب } n \text{ طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{لا}^n - \text{کا سر ذیل کے سلسلہ میں}$$

$$1 - \text{لا} (\text{لا} - 2 \text{جم طہ}) + \frac{1-n}{2} \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots + (1-n)^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots$$

$$+ (1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots + (1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots$$

دفعہ ۴۸ کی طرح مذکورہ بالا سلسلہ میں سے $\text{لا}^n - \text{کے سروں کو اکٹھا کرنے سے}$

$$\frac{\text{جب } n \text{ طہ}}{\text{جب طہ}} = \frac{1-n}{2} (1-n) + \frac{1-n}{2} (1-n) = \frac{1-n}{2} \left[\frac{1-n}{2} \times \frac{1+n}{2} \right] \text{جم طہ}^2$$

$$+ (1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots + (1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots$$

پس جب n طاق ہو تو بالا فر

$$(1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots + (1-n)^2 \text{لا}^2 (\text{لا} - 2 \text{جم طہ})^2 + \dots$$

نوٹ۔ یہ معلوم کرنا دلچسپی سے خالی نہ ہوگا کہ دفعہ ہذا کے ہر دو سلسلے دراصل دفعہ ۴۸ ہی کا سلسلہ ہیں جبکہ موخر الذکر کواٹا لکھا جائے۔ یہ امر طریقہ ثبوت سے بخوبی واضح ہے اور نیز اس کا بلا واسطہ ثبوت الگ دیا جاسکتا ہے۔
۱۵۔ جم ن طہ کی تفصیل جم طہ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں معلوم کرو۔

بموجب دفعہ ۴۹

$$\begin{aligned} ۲ \text{ جم ن طہ} &= \text{لا}^۱ \text{ کا سر} - \text{لا}^۲ \text{ کا سر} \quad (۱-۲) \text{ لا جم طہ} + \text{لا}^۱ \text{ میں} \\ &= \text{لا}^۱ \text{ کا سر} - \text{لا}^۲ \text{ کا سر ذیل کے سلسلہ ذیل میں} \\ ۱- \text{لا} (۲-۲ \text{ جم طہ}) &+ \text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) - \dots - \text{لا}^۱ (۱-۱ \text{ جم طہ}) \\ &+ \dots + (۱) \end{aligned}$$

حسب دفعہ ۴۹ -

صورت اول - فرض کرو کہ ن طاق ہے یعنی ن - اجنبی جن سزوں کی ہمیں ضرورت ہے وہ صرف انہی رقوم سے حاصل ہوتے ہیں جن میں ر کی قیمت $\frac{۱-۱}{۲}$ یا اس سے زیادہ ہو۔
لہذا ۲ جم ن طہ = $\text{لا}^۱ \text{ کا سر} - \text{لا}^۲ \text{ کا سر}$ ذیل کے سلسلہ میں

$$\begin{aligned} ۱- \text{لا} (۲-۲ \text{ جم طہ}) &+ \dots + \text{لا}^۱ (۱-۱) + \dots + \text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) \\ &+ \text{لا}^۱ (۱-۱) + \dots + \text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) + \dots + \text{لا}^۱ (۱-۱) \\ &+ \dots + \text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) + \dots + \text{لا}^۱ (۱-۱) \\ &= \left[\text{لا}^۱ (۱-۱) - \text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) \right] + \left[\text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) - \text{لا}^۱ (۱-۱) \right] + \dots + \left[\text{لا}^۱ (۲-۲ \text{ جم طہ}) - \text{لا}^۱ (۱-۱) \right] \end{aligned}$$

ہی کا سلسلہ (۲) ہیں جبکہ موخر الذکر کو الٹا لکھا جائے۔

۵۲۔ اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۲) سے اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ

$$(۱-)\frac{۱-۱}{۲} = ۱ - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} + \frac{(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} - \frac{(۱-۱)(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} + \dots$$

$$(۱-)\frac{۱-۱}{۲} = ۱ - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} + \frac{(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} - \frac{(۱-۱)(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} + \dots$$

$$\text{اور } (۱-)\frac{۱-۱}{۲} = ۱ - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} - \frac{(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} + \frac{(۱-۱)(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} - \dots$$

$$(۱-)\frac{۱-۱}{۲} + \dots + (۱-)\frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} - \dots - (۱-)\frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} + \dots$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو $\frac{۱-۱}{۲}$ طہ میں اور بنا بریں جم طہ کو

جب طہ میں تبدیل کر دیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب (۱-۱) طہ

یعنی (۱-۱) جم ن طہ اور جم ن طہ بدل کر جم (۱-۱) طہ

یعنی (۱-۱) جب ن طہ ہو جائیگا۔

دفعہ ۵۱ کی مساوات (۱) اور (۲) میں حسب تفسیر کرنے سے اگر ن

طاق ہو تو

$$\text{جمن طہ} = \text{جم طہ} - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} + \frac{(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم طہ} - \dots$$

$$(۱-)\frac{۱-۱}{۲} + \dots + (۱-)\frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} - \dots - (۱-)\frac{۱-۱}{۲} \text{ جم طہ} + \dots$$

$$\text{اور جب ن طہ} = \text{جم ن طہ} - \frac{(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم ن طہ} + \frac{(۱-۱)(۱-۱)(۱-۱)}{۲} \text{ جم ن طہ} - \dots$$

$$+ \dots + (1-x)^{\frac{n-1}{2}} x^{1-\frac{n-1}{2}} \text{جب } n \text{ طہ} \dots (4)$$

۵۳۔ نیز اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۵۰ کی مساوات (۳۱) اور دفعہ ۵۱ کی مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ

$$(1) \quad 1 + \frac{n}{1} = \frac{\text{جب } n \text{ طہ}}{\text{جب طہ}} = n \text{ جم طہ} \quad \frac{n(n-1)}{2} \text{ جم طہ}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} + (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$\text{اور } (1 - \frac{n}{2}) \text{ جم } n \text{ طہ} = 1 - \frac{n}{2} \text{ جم } n \text{ طہ} + \frac{n(n-2)}{2} \text{ جم } n \text{ طہ} - \dots$$

$$+ \frac{n}{2}(1 - \dots) \dots \dots (جیم ط) \dots \dots (۲)$$

ان مساواتوں میں اگر طہ کو $(\frac{17}{4} - \text{طہ})$ میں اور بنا بریں جم طہ کو جب طہ میں تبدیل کر دیا جائے تو جب ن طہ بدل کر جب $(\frac{17}{4} - \text{ن طہ})$ یعنی $(\frac{17}{4} + \text{اجب ن طہ})$ اور جم ن طہ بدل کر جم $(\frac{17}{4} - \text{ن طہ})$ یعنی $(\frac{17}{4} - \text{جم ن طہ})$ ہو جائے گا۔

یس حسبہ تغیر کرنے سے اگر ن جفت ہو تو

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ط}} = \text{ن جب ط} - \frac{\text{ن (ن-۲) (۲-ن)}}{۳} + \frac{\text{ن (ن-۲) (۲-ن)}}{۵} \text{ جب ۵ ط}$$

$$1 + \frac{1}{2}(-1) + \dots + (2 \text{ جب طہ})^{1-5} \dots (3)$$

اور حجم نطہ = ۱ - $\frac{N}{n}$ جب نطہ + $\frac{N(1-N)}{n}$ جب نطہ

+.....(۱) - $\frac{5}{7}$ - ۲- اجب ط (۴)

۵۴۔ اگر ن طاق ہو تو دفعہ ۵۲ کے سلسلے (۱)، (۲) اور اگر ن

جفت ہو تو دفعہ ۵۳ کے سلسلے (۱)، (۲) بالترتیب جب ن طہ اور
 جم ن طہ کی تفصیلات کو جم طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم
 میں ظاہر کرتے ہیں۔ نیز ن کی طاق یا جفت قیمتوں کے واسطے
 دفعات بالا کے سلسلے (۲)، (۴) ہر دو مقادیر مذکورہ یعنی جب ن طہ کی
 اور جم ن طہ کی تفصیلات کو جب طہ کی صعودی قوتوں کی رقوم میں ظاہر کرتے ہیں

امثلہ ۸

ثابت کرو کہ

- ۱۔ جب ۷ طہ = ۷ جب طہ - ۵۶ جب طہ + ۱۱۲ جب طہ - ۶۴ جب طہ
 - ۲۔ جم ۷ طہ = ۶۴ جم طہ - ۱۱۲ جم طہ + ۵۶ جم طہ - ۷ جم طہ
 - ۳۔ جب ۸ طہ = جب طہ [۱۲۸ جم طہ - ۱۹۲ جم طہ + ۸۰ جم طہ - ۱۶ جم طہ]
 - ۴۔ جم ۸ طہ = ۱ - ۳۲ جب طہ + ۱۶۰ جب طہ - ۲۵۶ جب طہ + ۱۲۸ جب طہ
 - ۵۔ جب ۹ طہ = جب طہ {۲۵۶ جم طہ - ۴۴۸ جم طہ + ۲۴۰ جم طہ - ۴۰ جم طہ + ۱}
 - ۶۔ جم ۹ طہ کو صرف جم طہ کی رقوم میں بیان کرو اور نتیجہ کی تصدیق کرو
- جیکہ طہ = $\frac{\pi}{3}$ اور طہ = $\frac{\pi}{3}$

۷۔ ذیل کی جبریہ مساوات متماثلہ کو ثابت کرو

$$\begin{aligned} & \text{ف}^۱ + \text{ق}^۱ = (\text{ف} + \text{ق})^۱ - \text{ن} (\text{ف} + \text{ق})^۲ - \text{ق}^۲ \\ & + \frac{\text{ن} (\text{ن} - ۳)}{۲} (\text{ف} + \text{ق})^۳ - \text{ق}^۳ + \dots \end{aligned}$$

اور اس سے حاصل کرو

$$۲ \text{ جم ن طہ} = (۲ \text{ جم طہ}) - \text{ن} (۲ \text{ جم طہ})^۲ + \frac{\text{ن} (\text{ن} - ۳)}{۲} (۲ \text{ جم طہ})^۳ - \dots$$

۵۵- مشق - ذیل کے سلسلوں کی قیمتیں معلوم کرو

قط طہ + قط (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) + قط (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) + ن رقموں تک
 قط طہ + قط (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) + قط (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) + ن رقموں تک
 دفعہ ۵۱ کی مساواتوں (۲) اور (۳) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر ن
 طاق ہو اور جم طہ کو م سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ن م} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۶} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)(\text{ن}-۳)}{۲۴} + \dots =$$

$$(۱) = \frac{\text{ن}}{۲}(\text{ن}-۱) \text{ جم ن طہ} \dots \dots \dots (۱)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$۱ - \frac{\text{ن}}{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۲۴} + \dots =$$

$$(۲) = \frac{\text{ن}}{۲}(\text{ن}-۱) \text{ جم ن طہ} \dots \dots \dots (۲)$$

اب اگر جم ن طہ کی قیمت معلوم ہو تو مساواتوں (۱) (۲) سے جم طہ
 کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

لیکن چونکہ جم ن طہ = جم (ن طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) = جم (ن طہ + $\frac{\pi^2}{2}$) +
 اسلئے ان مساواتوں سے

$$\text{جم (طہ + } \frac{\pi^2}{2} \text{)} = \text{جم (طہ + } \frac{\pi^2}{2} \text{)} + \text{جم (طہ + } \frac{\pi^2}{2} \text{)} + \dots$$

وغیرہ کی قیمتیں بھی حاصل ہونگی۔

اسلئے ہر حالت میں قیمتیں حسب ذیل ہونگی :-

جم طہ، جم (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$)، جم (طہ + $\frac{\pi^2}{2}$)، ن رقموں تک
 مساواتوں (۱) (۲) میں م کو $\frac{1}{2}$ کے برابر لکھو اور م سے ضرب دو
 تب ذیل کی مساواتیں حاصل ہونگی۔

جب ن طاق ہو تو

$$(۱-) \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } \times \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } \frac{۱-۱}{۲} = \dots\dots\dots (۳)$$

اور جب ن جفت ہو تو

$$(۱-) \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } - ۱ + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } + \dots\dots\dots (۴)$$

ان مساواتوں کی اصلیں

$$\text{قطا طہ، قط (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{)، قط (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) } \dots\dots\dots$$

ہونگی۔

ان کو با، با، با، با، با سے تعبیر کرو

تسب با + با + با + با + با = قیمتوں کا مجموعہ

$$\frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } \text{ قط ن طہ (اگر ن طاق ہو) } = \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } = \frac{۱-۱}{۲}$$

(اگر ن جفت ہو)

اور = ۰

$$\text{نیز با + با + با + با + با } = \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ + \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ + \dots\dots\dots$$

$$\text{جم ن طہ } = \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } \text{ قط ن طہ (اگر ن طاق ہو) } = \frac{۱-۱}{۲}$$

$$\text{اور } = ۲ - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } = \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } \text{ (اگر ن جفت ہو) } = \frac{۱-۱}{۲} \text{ ن } - ۱ - \frac{۱-۱}{۲} \text{ جم ن طہ } = \frac{۱-۱}{۲}$$

امثلہ ۹

ذیل کے جملوں کی قیمتیں معلوم کرو

$$۱- \text{جم طہ جم (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) جم (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) جم (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) جم (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) جم (طہ + } \frac{۱۱۲}{۲} \text{) } \dots\dots\dots$$

۲- جب طہ جب (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) جب (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) جب (طہ + (ن - ۱) $\frac{۲۲}{۱۰}$)

۳- قم طہ + قم (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) + قم (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) ن رقموں تک

۴- مس طہ + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) ن رقموں تک۔

[ذیل کے پانچ سوالوں میں دفعہ ۳ کی مساوات (۵) سے شروع کرو]

۵- مس طہ + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) ن رقموں تک

۶- مم طہ + مم (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) + مم (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$)

۷- مس طہ مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) ن اجزاء ضربی

۸- مس طہ + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) + مس (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) ن رقموں تک

۹- اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ ق = ۳ م = ن - ۱

جہاں ق = قطا $\frac{۲۲}{۱۰}$ + قطا $\frac{۲۲}{۱۰}$ + قطا $\frac{۲۲}{۱۰}$ (ن - ۱) رقموں تک

اور م = قم $\frac{۲۲}{۱۰}$ + قم $\frac{۲۲}{۱۰}$ + قم $\frac{۲۲}{۱۰}$ (ن - ۱) رقموں تک

۱۰- اگر قطا (طہ + $\frac{۲۲}{۱۰}$) میں رکو صفر سے لیکر ن - ایک تمام

قیمتیں دی جائیں تو جو رقم اس طرح سے حاصل ہوں گی ان میں سے

دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

نوٹ - ابواب مابعد کی خواندگی سے طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ ذرات ۴۹

اور ۵۱ کے نتائج دفعہ ۱۰ کی مدد سے آسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔

یعنی $\frac{۲۲}{۱۰}$ ن طہ = لا کاسر - لوک [۱- لا (۲ جم ط - لا)] کی تفصیل میں۔

It is also known
from the
very small
the

باب پنجم

سلسلہ قوت ناما ملطف مقداروں کیلئے
تفاعیل مستدیرہ ملطف زاویوں کیلئے۔ زائدی تفاعیل

۵۶۔ اگر لا کوئی حقیقی مقدار ہو تو ہم وضع ۵ میں ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{ولا} = ۱ + لا + \frac{\text{لا}^2}{۲} + \frac{\text{لا}^3}{۳} + \dots \dots \dots \text{تا لا تاہی (۱)}$$

اگر لا حقیقی نہ ہو بلکہ ملطف ہو یعنی اگر لا 'و + خ ب کی شکل کا ہو تو اس صورت میں فی الحال ہم ولا کو کوئی معنی نہیں پہنچا سکتے۔ فرض کرو کہ ہم اس رقم (یعنی ولا) کی تعریف یوں کرتے ہیں کہ لا کی تمام قیمتوں کے واسطے (خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملطف) ولا سے مراد ذیل کا سلسلہ ہے۔

$$۱ + لا + \frac{\text{لا}^2}{۲} + \frac{\text{لا}^3}{۳} + \dots \dots \dots \text{تا لا تاہی (۲)}$$

۵۷۔ ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا ملطف ہو تو یہ سلسلہ مستقر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لا = ر (رجم طہ + لا - آ جب طہ)

$$\text{تب } \text{ف} = ۱ + لا + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

$$+ ۱ + ر (رجم طہ + لا - آ جب طہ) + ر (رجم طہ + لا - آ جب طہ) + \dots + \text{سالا تنابی}$$

$$+ \dots + \text{سالا تنابی}$$

$$= ۱ + رجم طہ + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

$$+ [رجب طہ + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}]$$

$$\text{مقدار } ۱ + رجم طہ + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

$$> ۱ + ر + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

اور چونکہ موخر الذکر سلسلہ ر کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے مستحق

ہے اس لئے پہلا سلسلہ بھی مستحق ہے (دفعہ ۶)

اسی طرح سے سلسلہ

$$\text{رجب طہ} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

بھی مستحق ہے۔

پس ثابت ہوا کہ ف کا سلسلہ ہمیشہ مستحق ہوتا ہے۔

۵۸۔ پس اگر لا کوئی ملحق مقدار ہو تو ف کا سلسلہ

$$۱ + لا + \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ر}^2} + \dots + \text{سالا تنابی}$$

کو لکھنے کا ایک مختصر طریقہ ہوا۔

یاد رہے کہ سوائے اُس صورت کے کہ جب لا حقیقی ہو، مقدار ϕ میں نو سے مراد سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

نہیں ہے۔

جب لا مقف ہو تو ϕ اُسی شکل کے ایک سلسلہ کو تعبیر کرتا ہے جو سلسلہ کہ لا کے حقیقی ہونے کی صورت میں

$$(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots)$$

کے برابر ثابت کیا جا چکا ہے۔

۵۹۔ اُسی قسم کے ثبوت سے جو سی سمتھ کے ابجرا دفعہ ۳۰۴ میں دیا گیا ہے یہ آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\phi^2 = \phi + 1$$

جہاں لا اور ما خواہ حقیقی ہوں خواہ مقف۔

پس لا اور ما کے مقف ہونے کی صورت میں بھی تغاغل ϕ اور ϕ^2 قوت نما کے معمولی ضوابط کے تابع رہتے ہیں۔

۶۰۔ اگر لا کی بجائے ϕ رکھا جائے جہاں طہ حقیقی ہے تو

$$\phi^2 = 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^2}{4} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^2}{4} - \frac{\phi^2}{8} + \dots$$

$$+ \phi \left[1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^2}{4} - \frac{\phi^2}{8} + \dots \right]$$

= جم طہ + خ جب طہ (دفعات ۳۲، ۳۳)

لہذا قوٹہ = جم طہ - خ جب طہ

پس عمل جمع سے جم طہ = $\frac{\text{قوٹہ} + \text{قوٹہ}}{۲}$

اور عمل تفریق سے جب طہ = $\frac{\text{قوٹہ} - \text{قوٹہ}}{۲}$

ملف تراویلوں کے تفاعیل مستدیرہ

۶۱۔ اگر لا کوئی ملف مقدار ہو تو اب تک تفاعیل جب لا اور جم لا کو کوئی معنی نہیں دئے جاسکتے۔

ہم پہلے دفعات ۳۲، ۳۳ میں ثابت کرچکے ہیں کہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے واسطے

جب لا = لا - $\frac{\text{لا}^۳}{۲} - \frac{\text{لا}^۴}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۴} - \dots$ تا لا تا ہی

اور جم لا = ۱ - $\frac{\text{لا}^۳}{۲} - \frac{\text{لا}^۴}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۴} - \dots$ تا لا تا ہی
فرض کرو کہ ہم جب لا اور جم لا کی تعریف ہی اس طرح کرتے ہیں کہ لا کے ملف ہونے کی صورت میں ان سے بالترتیب اوپر کے سلسلے مراد ہوتے ہیں، یعنی فرض کرو کہ

جب لا = لا - $\frac{\text{لا}^۳}{۲} - \frac{\text{لا}^۴}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۴} - \dots$ تا لا تا ہی (۱)

اور جم لا = ۱ - $\frac{\text{لا}^۳}{۲} - \frac{\text{لا}^۴}{۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۴} - \dots$ تا لا تا ہی (۲)
جس صورت میں لا ملف ہو تو سلاسل بالا کی بائیں جانب کے

رکنوں کو بالتفصیل لکھنے کی بجائے ہم ان کو محض اختصار کی خاطر جب لا اور جم لا سے تعبیر کرتے ہیں۔

۶۲۔ تب لا کی تمام (حقیقی یا ملف) قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} + \text{خ جب لا} = ۱ + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}}{۲} - \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۲} + \dots$$

$$= ۱ + \text{خ لا} + \frac{\text{خ لا}}{۲} + \frac{\text{خ لا}}{۳} + \frac{\text{خ لا}}{۴} + \dots + \text{خ لا} = \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۵۶})$$

لہذا جم لا۔ خ جب لا = فو۔ خ لا

پس لا کی تمام حقیقی یا ملف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم لا} = \frac{\text{فو لا} + \text{فو خ لا}}{۲} \text{ اور جب لا} = \frac{\text{فو لا} - \text{فو خ لا}}{۲}$$

ان مقادیر کو آئیلر کی قوت نما قیمتیں کہتے ہیں۔

۶۳۔ اس موقع پر یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ جمع اور تفریق کے

مشتق ضابطے خیالی زاویوں کے لئے بھی درست ہوتے ہیں، یعنی یہ کہ

لا خواہ حقیقی ہو یا ملف

جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

جم (لا + ما) = جم لا جم ما۔ جب لا جب ما

جب (لا - ما) = جب لا جم ما۔ جم لا جب ما

اور جم (لا - ما) = جم لا جم ما + جب لا جب ما

$$\text{چونکہ جم لا} = \frac{\text{فو لا} + \text{فو خ لا}}{۲} \text{ اور جب لا} = \frac{\text{فو لا} - \text{فو خ لا}}{۲}$$

$$\text{تب جب (لا + ۲۲) = جب لا جم ۲۲ + جم لا جب ۲۲} \\ = \text{جب لا}$$

$$\text{اور جم (لا + ۲۲) = جم لا جم ۲۲ - جب لا جب ۲۲} \\ = \text{جم لا}$$

پس جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا اگر لا میں ۲۲ کا اضافہ کر دیا جائے، اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا میں

$$۲۲، ۶۶، ۱۱۰، ۱۵۴، ۱۹۸، ۲۴۲$$

کا اضافہ کر دیا جائے تو بھی جب لا اور جم لا کی قیمتوں میں کوئی فرق نہیں آتا۔ لہذا اگر لا ملف ہو تو جب لا اور جم لا دوری تفاعل ہیں جکا دور ۲۲ ہے۔

یہ نتیجہ اُن نتائج کے عین موافق ہے جو حقیقی زوایا کے واسطے حصہ اول دفعہ ۶۷ میں معلوم کئے جا چکے ہیں۔

امثلہ ۱۰

اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ جم لا = $\frac{\text{فولا} + \text{فولا}}{۲}$ اور جب لا = $\frac{\text{فولا} - \text{فولا}}{۲}$ تو ثابت کرو کہ لا اور ما کی تمام (حقیقی یا ملف) قیمتوں کے واسطے

$$(۱) \text{جم لا + جب لا} = ۱ \quad (۲) \text{جم لا - جب لا} = \text{جم لا}$$

$$(۳) \text{جب لا - لا} = ۱ \quad (۴) \text{جم لا = جب لا - جب لا} = ۱ - ۱ = ۰ \quad (۵) \text{جب لا = ۲ جب لا - لا} = ۲ جب لا - لا = ۲$$

$$(۶) \text{جب لا = ۲ جب لا - لا} = ۲ جب لا - لا = ۲ جب لا - لا = ۲$$

$$(۷) \text{جب لا - جب لا} = ۲ جب لا - لا = ۲ جب لا - لا = ۲$$

جیب التمام سے اسی طح سے معلوم کی جاتی ہیں جس طح سے کہ معمولی حماس، حماس التمام، قاطع، قاطع التمام کی قیمتیں معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{مثلاً مسزما} = \frac{\text{جبرما}}{\text{جوما}} = \frac{\text{جوما} - \text{جوما}}{\text{جوما}}$$

$$\text{قمرما} = \frac{\text{جبرما}}{\text{جوما}} = \frac{\text{جوما} - \text{جوما}}{\text{جوما}}$$

$$\text{قطرما} = \frac{\text{جبرما}}{\text{جوما}} = \frac{\text{جوما} - \text{جوما}}{\text{جوما}}$$

$$\text{مزمما} = \frac{\text{جبرما}}{\text{جوما}} = \frac{\text{جوما} - \text{جوما}}{\text{جوما}}$$

زائدی جیوب اور جیوب التمام کو ایک منحنی کے ساتھ جس کو قائم ہڈولی یا قائم قطع زائد کہتے ہیں وہی تعلق ہے جو معمولی جیوب اور جیوب التمام کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ اسی وجہ سے لفظ زائدی کا استعمال کیا گیا۔
۶۸۔ دفعات ۶۶، ۶۷ سے ظاہر ہے کہ

$$\left. \begin{aligned} \text{جزم (خما)} &= \text{جمرما} \\ \text{اور جب (خما)} &= \text{خ جبرما} \\ \text{اسے مس (خما)} &= \text{خ مسزما} \end{aligned} \right\} \text{ضوابط}$$

۶۹۔ علم مثلث کے اُن عام ترین ضوابط کے جواب میں جو زوایا کی نسبتوں سے متعلق ہیں ہڈولی نسبتوں کے ضوابط کا بھی ایک نظام ہے مثلاً ہمیں معلوم ہے کہ زاویہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جزم}^1 \text{ طہ} + \text{جب}^1 \text{ طہ} = ۱$$

$$\text{پس جزم}^2 \text{ (خ طہ)} + \text{جب}^2 \text{ (خ طہ)} = ۱$$

لہذا دفعہ گذشتہ کی رو سے

$$\text{جزم}^2 \text{ طہ} - \text{جبرما}^2 \text{ طہ} = ۱$$

[یہ نتیجہ زائدی تفخیل کی تعریف سے بھی براہ راست حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{جنر } ۲ \text{ طہ} = \left(\frac{\text{طہ}}{۲} + \text{طہ} \right) - \left(\frac{\text{طہ}}{۲} - \text{طہ} \right) \\ = \frac{\text{طہ} + ۲ + \text{طہ} - ۲ - \text{طہ}}{۲} = ۱$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ می اور و کی تمام قیمتوں کے واسطے

جب (می + و) = جب می جم + و + جم می جب و

می کی بجائے خ لا اور و کی بجائے خ ما رکھنے سے

جب [خ (لا + ما)] = جب خ لا جم خ ما + جم خ لا جب خ ما

تب دفعہ ماقبل کی رو سے

خ جنر (لا + ما) = خ جنر لا جنر ما + جنر لا خ جنر ما

جنر (لا + ما) = جنر لا جنر ما + جنر لا جنر ما

[براہ راست زائدی نسبتوں کی تعریف کی رو سے

$$\text{جنر لا جنر ما} + \text{جنر لا جنر ما} \\ = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{۲} \times \frac{\text{لا} + \text{لا}}{۲} + \frac{\text{لا} + \text{لا}}{۲} \times \frac{\text{لا} - \text{لا}}{۲} \\ \text{جو عمل ضرب سے} = \frac{۲ \text{ لا} + \text{لا} - ۲ \text{ لا} - \text{لا}}{۲} = \text{جنر (لا + ما)} \\ \text{نیز ہمیں معلوم ہے کہ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے}$$

$$\text{مس } ۳ \text{ طہ} = \frac{۳ \text{ مس طہ} - \text{مس } ۱ \text{ طہ}}{۳ - ۱}$$

اس میں طہ کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\text{مس (۳ خ لا)} = \frac{۳ \text{ مس (خ لا)} - \text{مس } ۱ \text{ (خ لا)}}{۳ - ۱}$$

اس لئے دفعہ ۶۸ کی رو سے

$$\text{نہ منتر (۳ لا)} = \frac{۳ \text{ نہ منتر لا} - \text{نہ منتر لا}}{۳ - ۱ \text{ نہ منتر لا}}$$

$$\text{پس منتر ۳ لا} = \frac{۳ \text{ منتر لا} + \text{منتر لا}}{۳}$$

حب سابق اسکا ثبوت بھی منتر لا کی تقریف سے باسانی اخذ کیا جاسکتا ہے۔

۷۰۔ عام طور پر دفعہ ۶۸ کی مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی عام ضابطہ میں جو زوایا کی جیوب اتمام کے لئے درست ہو 'جہم' کی بجائے جہز پڑھیں تو بھی ضابطہ مذکور درست رہے گا۔

نیز چونکہ جب (خا) = - جہز ما اسلئے دفعہ مذکورہ بالا کی مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں کوئی ایسا ضابطہ معلوم ہو جس میں کسی زاویہ کی جیب کا مربع اور جیب اتمام دونوں شامل ہوں تو اس ضابطہ میں 'جہم' کی بجائے 'جہز' اور 'جب' کی بجائے 'جہز' لکھنے سے جو ضابطہ حاصل ہوگا وہ بھی درست ہوگا۔

اسی طرح مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ہم کسی ضابطہ کو جس میں 'من' شامل ہو محض منتر کی بجائے 'منتر' لکھنے سے ایک متشابہ ضابطہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔

اس طریقہ سے ہم دفعات ۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳ اور ۳۴۔ ۵۳

سے اور نیز حصہ اول کی دفعات ۲۴۷ اور ۲۴۸ سے ایسے متشابہ

سلسلے اور ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زائدی تقاعیل پر مشتمل ہوں

۷۱۔ (دفعہ ۵۶ کے سلسلہ کو مد نظر رکھتے ہوئے) دفعہ ۶۷ کی رو سے

ظاہر ہے کہ

$$\text{جنر لا} = \frac{1}{p} (\text{ق}^0 + \text{ق}^{-1})$$

$$= 1 + \frac{\text{لا}^1}{\text{ق}^1} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ق}^2} + \frac{\text{لا}^3}{\text{ق}^3} + \dots$$

$$\text{اور جبر لا} = \frac{1}{p} (\text{ق}^0 - \text{ق}^{-1})$$

$$= \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{\text{ق}^2} + \frac{\text{لا}^4}{\text{ق}^4} + \dots$$

یہ جنر لا اور جبر لا کی تفصیلی قیمتیں کہلاتی ہیں۔

۷۴۔ زائدی تفاعیل کے ادوار۔

ہم جانتے ہیں کہ طہ کی تمام حقیقی یا ملفف قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم خ طہ} = \text{جنر طہ}$$

$$\text{اس لئے جنر (لا + خ م) = جم } \{ \text{لا + خ م} \} = \text{جم (خ لا - م)}$$

$$= \text{جم} [-\text{م} + \text{خ لا} + \text{م}] \dots \dots \dots \text{دفعہ ۶۵}$$

$$= \text{جم} [\text{م} + \text{خ لا} + \text{خ م}] = \text{جنر} [\text{م} + \text{خ لا} + \text{خ م}]$$

$$= \text{اسی طرح سے جنر} [\text{م} + \text{خ لا} + \text{خ م}] = \dots \dots \dots$$

پس ثابت ہوا کہ زائدی جیب تمام ایک دوری تفاعل ہے جس کا

دور خیالی ہے اور 'م' کے مساوی ہے۔

یز چونکہ جبر طہ = سنج جیب خ طہ اسلئے

$$\text{جبر (لا + خ م) = - خ جیب } \{ \text{لا + خ م} \}$$

$$= - \text{خ جیب } \{ \text{لا - م} \}$$

$$= - \text{خ جیب} [-\text{م} + \text{خ لا} + \text{م}]$$

$$= - \text{خ جیب } \{ \text{م} + \text{خ لا} + \text{خ م} \}$$

$$= \text{جبر} [۲۲خ + لا + خ۱]$$

پس جبر (لا + خ۱) کا دور ۲۲خ ہے۔

اسی طرح سے بتایا جاسکتا ہے کہ جبر (لا + خ۱) کا دور ۲۲خ ہوتا ہے
زائدی تناعلوں کا دور حقیقی نہیں ہوتا بلکہ خیالی ہوتا ہے، اس لحاظ سے
زائدی تفاعیل، مستدیر تفاعیل سے اختلاف رکھتے ہیں۔

۳۷۔ مشق ۱۔ جب (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ
الگ کرو۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{جب (عہ + خ بہ)} = \text{جب عہ جم خ بہ} + \text{جم عہ جب خ بہ}$$

$$= \text{جب عہ} \frac{\text{قوت} + \text{قوت}^{-}}{۲} + \text{جم عہ} \frac{\text{قوت}^{-} - \text{قوت}}{۲}$$

$$= \text{جب عہ} \frac{\text{قوت} + \text{قوت}^{-}}{۲} + \text{خ جم عہ} \frac{\text{قوت}^{-} - \text{قوت}}{۲}$$

$$= \text{جب عہ جبر بہ} + \text{خ جم عہ جبر بہ}$$

مشق ۲۔ مس (عہ + خ بہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو۔
ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{مس (عہ + خ بہ)} = \frac{\text{جب (عہ + خ بہ)}}{\text{جم (عہ + خ بہ)}}$$

$$\frac{۲ \text{ جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}}{۲ \text{ جم (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)}} = \frac{\text{جب ۲ عہ} + \text{جب ۲ خ بہ}}{\text{جم ۲ عہ} + \text{جم ۲ خ بہ}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ عہ} + \text{خ جبر ۲ بہ}}{\text{جم ۲ عہ} + \text{خ جبر ۲ بہ}} \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۶۸})$$

متبادل ثبوت

فرض کرو کہ مس (عہ + خ بہ) = لا + خ۱

پس مس (ع-خ بہ) = لا-خ ما

$$\therefore لا = \frac{1}{2} [مس (ع+خ بہ) + مس (ع-خ بہ)]$$

$$= \frac{جب (ع+خ بہ) جم (ع-خ بہ) + جم (ع+خ بہ) جب (ع-خ بہ)}{2 جم (ع+خ بہ) جم (ع-خ بہ)}$$

$$= \frac{جب ۲ ع}{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ} = \frac{جب ۲ ع}{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}$$

$$\text{نیز ما} = \frac{1}{2} [مس (ع+خ بہ) - مس (ع-خ بہ)]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{جب (ع+خ بہ) جم (ع-خ بہ) - جم (ع+خ بہ) جب (ع-خ بہ)}{جم (ع+خ بہ) جم (ع-خ بہ)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{جب ۲ خ بہ}{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ} = \frac{جب ۲ خ بہ}{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}$$

$$\therefore مس (ع+خ بہ) = \frac{جب ۲ ع + خ بہ جب ۲ ع}{جم ۲ ع + جم ۲ خ بہ}$$

مشق ۳۔ جز (ع+خ بہ) کے حقیقی اور غیر حقیقی حصے الگ الگ کرو۔

$$\text{ہمیں معلوم ہے کہ جز (ع+خ بہ) = } \frac{ع+خ بہ + ع-خ بہ}{2} \text{ دفعہ ۱۰}$$

$$= \frac{ع+خ بہ + ع-خ بہ + ع-خ بہ + ع+خ بہ}{2}$$

$$= \frac{ع (جم بہ + خ جب بہ) + ع (جم بہ - خ جب بہ)}{2} \text{ دفعہ ۲۲}$$

$$= \frac{جم بہ (ع+ع) + خ جب بہ (ع-ع)}{2}$$

$$= \text{جم به جمرعه} + \text{خ جب به جبرعه}$$

مبادیل ثبوت

$$\text{جمر (ع + خ به)} = \text{جم} = \{ \text{ع + خ به} \} \dots \dots \dots \text{دفعه ۶۸}$$

$$= \text{جم} = \{ \text{خ ع - به} \} = \text{جم (خ ع)} + \text{جم به + جب (خ ع) جیت}$$

$$= \text{جمرعه جم به + خ جبرعه جب به}$$

امثله ۱۱

Sum part

ثابت کرد که

$$۱- \text{جمر ۲ لا} = ۲ + ۱ = ۲ \text{ (جمر لا)} = ۲ \text{ (جمر لا)} - ۱$$

$$۲- \text{جمر (ع + به)} = \text{جمرعه جمر به} + \text{جبرعه جبر به}$$

$$۳- \text{جمر (ع + به) - جمر (ع - به)} = ۲ \text{ جبرعه جبر به}$$

$$۴- \text{مسر (ع + به)} = \frac{\text{مسر ع + مسر به}}{۱ + \text{مسر ع مسر به}}$$

$$۵- \text{جمر ۳ لا} = ۴ \text{ جمر ۲ لا} - ۳ \text{ جمر لا}$$

$$۶- \text{جبر ۳ لا} = \text{جبر لا} + ۴ \text{ جبر ۲ لا}$$

$$۷- \text{جبر (لا + ۶)} = \text{جمر (لا - ۶)} = \frac{۱}{۴} (\text{جبر ۲ لا} + \text{جبر ۶ لا})$$

$$۸- \text{جمر ۲ لا} + \text{جمر ۵ لا} + \text{جمر ۸ لا} + \text{جمر ۱۱ لا} = ۴ \text{ جمر ۳ لا} + \text{جمر ۶ لا} + \text{جمر ۹ لا}$$

$$۹- \text{جمر لا} + \text{جمر (لا + ۶)} + \text{جمر (لا + ۱۲)} + \text{جمر (لا + ۱۸)} + \dots \dots \dots \text{ن رقمون تک}$$

$$= \frac{\text{جمر (لا + ۱۸)} + \text{جمر (لا + ۱۲)} + \text{جمر (لا + ۶)} + \text{جمر لا}}{\frac{۱}{۴}}$$

$$۱۰- \text{جبر لا} + \text{جبر (لا + ۶)} + \text{جبر (لا + ۱۲)} + \text{جبر (لا + ۱۸)} + \dots \dots \dots \text{ن رقمون تک}$$

$$= \frac{\text{جینر (لا) } + \frac{1}{2} (ما) \text{ جینر } \frac{ن}{2}}{\text{جینر } \frac{1}{2}}$$

۱۱- جینر لا + ن جینر ۲ لا + $\frac{ن(1-ن)}{2}$ جینر ۲ لا + - (ن + ۱) رقموں تک

$$= ۲ \text{ جینر } \frac{۳}{۲} \text{ لا} \text{ جینر } \left(\frac{ن}{۲} + ۱ \right) \text{ لا}$$

۱۲- جینر بہ جب عہ + خ جینر بہ جم عہ = خ جم (عہ + خ بہ)

۱۳- جب ۲ عہ + خ جینر ۲ بہ = ۲ جب (عہ + خ بہ) جم (عہ - خ بہ)

۱۴- جم (عہ + خ بہ) + خ جب (عہ + خ بہ) = قوت (جم عہ + خ جب عہ)

۱۵- اگر مس ما = مس عہ مسر بہ اور مس می = مم عہ مسر بہ تو

ثابت کرو کہ مس (ما + می) = جینر ۲ بہ قوت ۲ عہ

۱۶- اگر می = لوک مس $\left(\frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲} \right)$ (طہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } \frac{۳}{۲} = \text{مس } \frac{۳}{۲}$$

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو۔

۱۸- مم (عہ + خ بہ) ۱۷- جم (عہ + خ بہ)

۱۹- قوت (عہ + خ بہ) ۲۰- قوت (عہ + خ بہ)

۲۱- جینر (عہ + خ بہ) ۲۲- مسر (عہ + خ بہ)

۲۳- قطر (عہ + خ بہ)

۲۴- ثابت کرو کہ مس $\frac{ی + خ و}{۲} = \frac{\text{جب ی} + \text{خ جینر و}}{\text{جم ی} + \text{جینر و}}$

۲۵- اگر جب (۱ + خ بہ) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$۱ = \frac{۲ا}{\text{جینر } ۲ب} + \frac{لا}{\text{جینر } ۲ب}$$

$$\text{اعد} \quad \frac{\text{لا}^2}{\text{جب}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{جم}^2} = 1$$

$$۲۶- \text{اگر مس} (1 + \text{خ} + \text{ب}) = \text{لا} + \text{خ} + \text{ما} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲ \text{ لا} \text{ ما} = ۲ \text{ لا} \text{ جم}^2 + ۱ = ۱$$

$$\text{اور} \quad \text{لا}^2 + \text{ما}^2 - ۲ \text{ لا} \text{ ما} = ۲ \text{ مز}^2 \text{ ب} + ۱ = ۱$$

$$۲۷- \text{اگر جب} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{جم} + \text{عہ} + \text{خ} \text{ جب عہ} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جم}^2 \text{ طه} = \pm \text{جب}^2 \text{ عہ}$$

$$۲۸- \text{اگر جب} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{مس} (\text{جم} + \text{عہ} + \text{خ} \text{ جب عہ}) \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{مس}^2 = \frac{1}{4} [\text{جم}^2 \text{ ذہ} - \text{جم}^2 \text{ طه}] \text{ اور مس عہ} = \text{مس} \text{ ذہ} \text{ مم} \text{ طه}$$

$$۲۹- \text{اگر جم} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{ل} (\text{جم} + \text{عہ} + \text{خ} \text{ جب عہ}) \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{ذہ} = \frac{1}{2} \text{ لوک} \frac{\text{جب} (\text{طه} - \text{عہ})}{\text{جب} (\text{طه} + \text{عہ})}$$

$$۳۰- \text{اگر مس} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{مس} + \text{عہ} + \text{خ} \text{ قط عہ} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{قوت}^2 = \pm \text{مم}^2 \text{ عہ} \text{ اور} \quad ۲ \text{ طه} = \text{ن} + \frac{\text{ن}}{۲} + \frac{\text{ن}}{۲} + \text{عہ}$$

$$۳۱- \text{اگر مس} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{جم} + \text{عہ} + \text{خ} \text{ جب عہ} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{طه} = \frac{\text{ن}}{۲} + \frac{\text{ن}}{۲} \text{ اور ذہ} = \frac{1}{4} \text{ لوک مس} \left(\frac{\text{ن}}{۲} + \frac{\text{ن}}{۲} + \text{عہ} \right)$$

$$۳۲- \text{اگر} \quad \text{لا} + \text{خ} + \text{ب} = \text{ج} \text{ مس} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{مس}^2 \text{ لا} = \frac{\text{ج}^2}{\text{ج}^2 - \text{ب}^2}$$

$$۳۳- \text{اگر مس} (\text{طه} + \text{خ} + \text{ذہ}) = \text{جب} (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

$$\text{تو مم}^2 \text{ ما} = \text{بمز}^2 \text{ ذہ} = \text{مم} \text{ لا} \text{ جب}^2 \text{ طه}$$

۳۴۔ اگر مس (عہ + خ بہ) = خ

جہاں عہ اور بہ دونوں حقیقی ہیں تو ثابت کر دکھ عہ غیر معین ہے اور بہ لامتناہی ہے۔

ثابت کر دکھ

$$۳۵۔ \frac{1}{x} \left\{ \text{جہز لا} + \text{جب لا} \right\} = لا + \frac{\frac{لا}{و}}{\frac{و}{و}} + \frac{\frac{لا}{و}}{\frac{و}{و}} + \dots \text{تا لامتناہی}$$

$$۳۶۔ \frac{1}{x} \left\{ \text{جز لا} + \text{جم لا} \right\} = ۱ + \frac{\frac{لا}{م}}{\frac{م}{م}} + \frac{\frac{لا}{م}}{\frac{م}{م}} + \dots \text{تا لامتناہی}$$

۳۷۔ مقلوب و مستدیر تفاعل۔ اگر عہ اور بہ دونوں حقیقی

ہوں اور عہ = جم بہ تو دفعہ ۳۴م ۲ حصہ اول میں بتایا جا چکا ہے کہ عہ کی مقلوب جیب التمام سے مراد بہ کی وہ قیمت ہے جو ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان واقع ہے اور یہ بھی اشارہ مذکور ہو چکا ہے کہ بہ ایک کثیرالقیمت مقدار ہوتی ہے۔

اگر اب لا + خ ما = جم (ی + خ و)

تو اسی طرح سے ہم ی + خ و کو لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام کہیں گے۔ لیکن چونکہ

$$لا + خ ما = جم (ی + خ و) = جم [۲ن \pm (ی + خ و)] \dots (\text{دفعہ ۶۵})$$

اس لئے ظاہر ہے کہ

$$۲ن \pm (ی + خ و)$$

بھی لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ہے جہاں ن سے مراد کوئی صحیح عدد پس لا + خ ما کی مقلوب جیب التمام ایک کثیرالقیمت تفاعل ہے۔ اگر مقلوب جیب التمام کی قیمتوں کی کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو

اس کو جم' (لا + خ ما) کی بجائے جم' (لا + خ ما) کہتے ہیں، اسی طرح سے دیگر مثلثی نسبتوں کی رموز کا خط نسخ میں لکھا جانا بھی انہی معنوں پر دلالت کرتا ہے۔ نیز لا + خ ما کی مقلوب جیب اتمام کی خاص قیمت سے $۲ن \pm (ی + خ و)$ کی ایسی قیمت مراد ہے جس سے کہ $۲ن + ی$ یا $۲ن - ی$ کی قیمت صفر اور ۲ کے درمیان واقع ہو۔

اس قیمت خاص کو جم' (لا + خ ما) سے تعبیر کرتے ہیں۔
تب ظاہر ہے کہ

$$\text{جم' (لا + خ ما)} = ۲ن \pm \text{جم' (لا + خ ما)}$$

۵۔ اسی طرح سے اگر

لا + خ ما = جب (ی + خ و) = جب { (۱ - ی + خ و) + ۲ }
تو $۲ن + (۱ - ی + خ و)$ کو لا + خ ما کی مقلوب جیب کہتے ہیں۔
یہ بھی ایک کثیر قیمت مقدار ہے اور جب' (لا + خ ما) سے تعبیر کی جاتی ہے۔ نیز اس کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ - $\frac{۲}{۲}$ اور $\frac{۲}{۲}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے،
اس خاص قیمت کو جب' (لا + خ ما) سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
اس سے ظاہر ہے کہ

$$\text{جب' (لا + خ ما)} = ۲ن + (۱ - ی + خ و)$$

اسی طرح مس' (لا + خ ما) اور مس' (لا + خ ما) کی تعریفات بھی حسب کی جا سکتی ہیں یعنی مس' (لا + خ ما) کی قیمت خاص سے وہ قیمت مراد ہے جس سے اس کا حقیقی حصہ - $\frac{۲}{۲}$ اور $\frac{۲}{۲}$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے۔ تب ظاہر ہے کہ

$$\text{مس}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{مس}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

اسی طرح سے

$$\text{قط}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{قط}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

$$\text{قم}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{قم}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

$$\text{اور مم}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما}) = \text{ن} + \text{مم}^1 (\text{لا} + \text{خ} + \text{ما})$$

۷۶۔ آئندہ ہم جمہ احبہ، جمہ اور حبہ کو انہی معنوں میں استعمال کریں گے جو اوپر تجویز کئے گئے ہیں۔

۷۷۔ مقلوب زائدی تفاعل

اگر لا = جزمہ تو بموجب دفعہ ۷۷ ما = جزمہ لا

$$\frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} = \text{اگر لا حقیقی ہو تو لا}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{لا} + \text{ما}}{۲} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$= \frac{۱}{۱ + ۱} \text{ یا } \frac{۱}{۱ + ۱}$$

$$\text{نہ ما} = \pm \text{لوک} (\text{لا} + \text{ما})$$

بائیں جانب کے رکن کی علامت ہمیشہ مثبت لی جاتی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ جب لا حقیقی ہو تو جزمہ لا ایک قیمت والا تفاعل ہے جزمہ لا اور مسہ لا کی تعریفات بھی بدستور کی جاسکتی ہیں اور اگر لا حقیقی

ہو تو یہ ایک قیمت والے تفاعل ہیں۔

۷۸۔ اگر $ع + خ = ب$ جنز (لا + خ ما) تو لا + خ ما کو $ع + خ$ بہ کی مقلوب زائدی جیب التام کہتے ہیں۔

لیکن جنز (لا + خ ما) = جنز $\{ ۲ ن خ \pm (لا + خ ما) \}$... بموجب دفعہ ۷۲ اس لئے $۲ ن خ \pm (لا + خ ما)$ مقدار $ع + خ$ بہ کی مقلوب زائدی جیب التام ہے اور اسکی خاص قیمت سے مراد اس کی وہ قیمت ہے جس سے اس کا خیالی حصہ ۰ اور $خ$ کے درمیان واقع ہو یعنی وہ قیمت جس سے $۲ ن خ \pm ما$ ۰ اور $خ$ کے درمیان واقع ہو۔

اسی طرح سے $ع + خ$ کے مقلوب زائدی جیب وماس کی بھی تعریفیں کی جاسکتی ہیں۔ ان صورتوں میں ان کی خاص قیمتیں وہ ہونگی جن میں خیالی حصہ $\frac{۲}{۲} خ$ اور $\frac{۲}{۲} خ$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۷۹۔ مشق ۱۔ جب 'ا' (جم طہ + خ جب طہ) کے خیالی اور حقیقی حصے الگ الگ کرو جہاں طہ حقیقی ہے۔

فرض کرو کہ جب 'ا' (جم طہ + خ جب طہ) = لا + خ ما
یعنی جم طہ + خ جب طہ = جب (لا + خ ما)

= جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جم خ ما + خ جم لا جب خ ما

اس لئے جب لا جم خ ما = جم طہ (۱)

اور جم لا جب خ ما = جب طہ (۲)

درج لینے اور جمع کرنے سے

۱۔ جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما = جب لا جم خ ما + خ جم لا جب خ ما

۲۔ جب خ ما = جم لا ۱۔ جب خ ما = جم لا

اس لئے اگر جب طہ کو مثبت فرض کیا جائے تو

مساوات (۲) سے جم لا = جب طہ

اور چونکہ لا (-) اور (+) کے درمیان واقع ہونا چاہئے وغیرہ

اس لئے جم لا = + واجب طہ یعنی لا = جم' (اجب طہ)

تب مساوات (۲) سے

جبر ما = + واجب طہ

اس لئے تو ۲ - ۱ واجب طہ = ۱ جو تو کے لحاظ سے درجہ دوم کی مساوات ہے

لہذا تو = واجب طہ + ۱ واجب طہ

یعنی ما = لوک { واجب طہ + ۱ واجب طہ }

مشق ۲ - مس' { عہ + خر بہ } کے حقیقی اور خیالی حصے

اگک اگک کرو۔

فرض کرو کہ مس' { عہ + خر بہ } = (لا + خر ما)

یعنی مس (لا + خر ما) = عہ + خر بہ

اور مس (لا - خر ما) = عہ - خر بہ

∴ مس ۲ لا = مس { (لا + خر ما) + (لا - خر ما) }

$$\frac{2 \text{ عہ}}{1 - \text{عہ} - \text{خر ما}} = \frac{(عہ + خر بہ) + (عہ - خر بہ)}{1 - (عہ + خر بہ) - (عہ - خر بہ)}$$

$$\therefore لا = \frac{1}{2} \text{ مس' } \frac{2 \text{ عہ}}{1 - \text{عہ} - \text{خر ما}}$$

نیز مس (۲ خر ما) = مس { (لا + خر ما) - (لا - خر ما) }

$$\frac{2 \text{ خر بہ}}{1 + \text{عہ} + \text{خر ما}} = \frac{(عہ + خر بہ) - (عہ - خر بہ)}{1 + (عہ + خر بہ) - (عہ - خر بہ)}$$

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{۲۲}{۲ + ۲ + ۱} = \frac{۲۲ - ۲ - ۲}{۲ - ۲ + ۲}$$

$$\frac{۲۲ + ۲ + ۲ + ۱}{۲ - ۲ + ۲ + ۱} = \frac{۲۲}{۲ - ۲}$$

$$\frac{۲ + (۲ + ۱)}{۲ + (۲ - ۱)} =$$

$$\frac{\{ ۲ + (۲ + ۱) \}}{\{ ۲ + (۲ - ۱) \}} \text{ لوک } \frac{۱}{۲} = م$$

$$\frac{۲۲}{۲ + ۲ + ۱} = م \text{ سے مساوات (۱)}$$

$$\frac{۲۲}{۲ + ۲ + ۱} \text{ اس لئے } م = \frac{۱}{۲} \text{ مسز } ۱$$

$$\text{پس مس } ۱ = (۲ + ۲) = ن + ۲ + ۲ \text{ مس } ۱ = (۲ + ۲)$$

$$= ن + \frac{۱}{۲} \text{ مس } ۱ = \frac{۲}{۲ - ۲ + ۱} + \frac{۲}{۲} \text{ مس } ۱ = \frac{۲}{۲ + ۲ + ۱}$$

۱۲۔ مثلہ

ذیل کی مقادیر کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو

$$۱۔ \text{ مس } ۱ = \{ ۲ + ۲ + ۲ \}$$

$$۲۔ \text{ جم } ۱ = \{ ۲ + ۲ + ۲ \} \dots \text{ جہاں طہ کوئی مثبت حلوہ زاویہ}$$

ثابت کرو کہ

$$۳۔ \text{ جبر } ۱ = \{ ۱ + ۱ + ۱ \} \text{ مسز } ۱ = \frac{۱}{۱ - ۱ + ۱}$$

$$۵۔ \text{ جبر } ۱ = \{ ۱ + ۱ + ۱ \} \text{ لوک } \frac{۱}{۱}$$

$$۶۔ \text{ مسز } ۱ = \frac{۱}{۱} \text{ لوک } \frac{۱}{۱}$$

$$۷۔ جبۂ ارقم طہ = \{ ۲ن + (-۱) \} \frac{۲}{۴} + خ (-۱) \frac{۱}{۴} \text{ لوک مم طہ}$$

$$۸۔ مس۱ (خ طہ) = \frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴} - \frac{۲}{۴} \text{ لوک مس} \left(\frac{۲}{۴} - \frac{۲}{۴} \right)$$

$$۹۔ مس۱ - \frac{\text{مس ۲ طہ} + \text{مس ۲ ذہ}}{\text{مس ۲ طہ} - \text{مس ۲ ذہ}} + \frac{\text{مس ۱}}{\text{مس طہ} + \text{مس ذہ}}$$

$$= \text{مس ۱ (مم طہ مرفہ)}$$

ذیل کی مفادیر کی ترسیں بناؤ جہاں لا سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

۱۰۔ جبہ لا اور قمز لا

۱۱۔ جہز لا اور قطنز لا

۱۲۔ مسز لا اور ممز لا

بانت

ملف مقادیر کے لوکارتم

۸۰۔ اگر $e = 1$ اور $e = 2$ اور لا دونوں حقیقی ہوں تو ہمیں معلوم ہے کہ لا کو e کا لوکارتم اساس فو پر کہتے ہیں۔

نیز ہم $e = 5$ میں بتا چکے ہیں کہ

$e = 10 = 1 + 2 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots$ تا لا تناہی
اس لئے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ اساس فو پر e کا لوکارتم لا فیل کی مساوات

$e = 1 + 2 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots$ تا لا تناہی (۱)
کی ایک اصل ہے

اب ہم مندرجہ بالا نتیجہ کو وسعت دیکر یہ معلوم کریں گے کہ ملف مقادیر کی صورت میں یہ مسئلہ کیا شکل اختیار کرتا ہے۔

۸۱۔ تعریف۔ اگر $e = 1$ اور $e = 2$ کوئی ملف مقدار ہو اور $e = 3$ بہ ایک اور ملف مقدار ایسی ہو جو $e = 1$ اور $e = 2$ کے یعنی سلسلہ

$$1 + (1 + 2) + \frac{(1 + 2 + 3)}{3} + \frac{(1 + 2 + 3 + 4)}{4} + \dots$$

کے مساوی ہو تو $e = 1$ اور $e = 2$ کو مقدار $e = 3$ کا ایک لوکارتم کہتے ہیں

لفظ 'ایک' کے استعمال کرنے کی وجہ یہ ہے کہ درحقیقت مندرجہ بالا تعریف کے ماتحت کسی مقدار کے اور بھی بہت سے لوکارتم ہوتے ہیں اس امر کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے

$$\text{ع} + \text{خ} \text{ب} = \text{و} + \text{لا} + \text{خ} \text{ا} \dots \dots \dots (۱)$$

نیز ہمیں معلوم ہے کہ دفعہ ۶۲ کے مطابق ن کی ایسی تمام قیمتوں کے لئے جو صحیح اعداد ہوں

$$\text{و} ۲ \text{ن} ۲ = \text{جم} ۲ \text{ن} ۲ + \text{خ} \text{ب} ۲ \text{ن} ۲ = ۱ \dots \dots \dots (۲)$$

اسلئے مساوات (۱) اور (۲) سے از روئے دفعہ ۵۹

$$\text{ع} + \text{خ} \text{ب} = \text{و} + \text{لا} + \text{خ} \text{ا} = \text{و} + (۲ \text{ن} ۲ + ۱) + \text{خ} \text{ب}$$

پس متذکرہ بالا تعریف کے ماتحت یہ ظاہر ہے کہ اگر ع + خ ب کا لوکارتم (لا + خ ا) ہو تو

$$\text{لا} + \text{خ} \text{ا} + ۲ \text{ن} ۲ = \text{خ}$$

$$\text{یعنی} \quad (\text{لا} + \text{خ} \text{ا} + ۲ \text{ن} ۲)$$

بھی اس کا ایک لوکارتم ہوگا۔

۸۲۔ اب ہم ملفوظ مقدار ع + خ ب کے لوکارتم معلوم کرتے ہیں جہاں ع اور ب دونوں حقیقی ہیں۔

دفعہ ۲۰ کی رو سے

$$\text{ع} + \text{خ} \text{ب} = \text{ر} \{ \text{جم} (۲ \text{ن} ۲ + ۱) + \text{خ} \text{ب} (۲ \text{ن} ۲ + ۱) \}$$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$\text{ر} = \text{ع} + ۲ \text{ب}$$

اور ط سے مراد '۲' اور '۲' کے درمیان ایسا زاویہ ہے کہ $\text{جم ط} = \text{ع}$
اور جب ط = $\frac{2}{3}$

یعنی دفعہ ۲۰ کی قیود کے ماتحت

ط = مس - $\frac{2}{3}$
پس اگر لا + خ ما ایک لوکارتم ہو ع + خ بہ کا
تو ر [جم (۲ ن ۲ + ط) + خ جب (۲ ن ۲ + ط)] = $\text{ولا} + \text{خ}$
= $\text{ولا} \times \text{ولا} + \text{ولا} \times \text{ولا} \dots \dots \dots$ (دفعہ ۵۹)

= $\text{ولا} (\text{جم} + \text{خ جب} + \text{ما})$

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$\text{ولا} \text{جم} + \text{ما} = \text{رحم} \{ ۲ ن ۲ + ط \}$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$\text{ولا} \text{جب} + \text{ما} = \text{رحب} \{ ۲ ن ۲ + ط \}$

اس لئے $\text{ولا} = \text{ر اور} + \text{ما} = ۲ ن ۲ + ط$

چونکہ لا اور ر دونوں حقیقی ہیں اسلئے لا اور کا معمولی جبرینہ پیروی لوکارتم ہے

یعنی لا = لوک

اسلئے ع + خ بہ کا ایک لوکارتم

لوک + $\text{خ} (۲ ن ۲ + ط)$

یعنی لوک $\text{ولا} + \text{ع} + \text{خ} (۲ ن ۲ + ط) + \text{مس} - \frac{2}{3}$ ہے۔

چونکہ ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہو سکتی ہے اس لئے فوراً یہ نتیجہ

نکلتا ہے کہ ع + خ بہ کے لوکارتم تعداد میں لا انتہا ہوتے ہیں اور انکا

فرق ۲۲ خ کا صنف ہوتا ہے۔

۸۴۔ دفعہ ماقبل کی رو سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ لوکارتم کی اُس وسیع تعریف کے ماتحت جو دفعہ ۸۱ میں بیان کی گئی ہے کسی عدد کا لوکارتم ایک کثیر الحقیقت تفاعل ہوتا ہے یا صاف الفاظ میں ایک عدد کے لانا انتہا لوکارتم ہوتے ہیں۔

جب قیمتوں کی اس کثرت کو بھی ملحوظ رکھنا مقصود ہو تو $عد + خر$ کے لوکارتم کو $لوک (عد + خر)$ لکھا جاتا ہے۔

اسلئے $لوک (عد + خر) = لوک (عد + ۲ + ۲ + خر)$ (۲ ن ۲ + ۲۱ من اے) اگر ہم $لوک (عد + خر)$ کی مندرجہ بالا قیمت میں $ن$ کو صفر کے برابر فرض کریں تو جملہ محصلہ کو $لوک (عد + خر)$ کی خاص قیمت کہتے ہیں اور $لوک (عد + خر)$ سے تعبیر کرتے ہیں، پس

$لوک (عد + خر) = لوک (عد + ۲ + ۲ + خر)$ مس ۱ - اے اور $لوک (عد + خر) = ۲ ن خر + ۲۱ + لوک (عد + خر)$

علامات $لوک$ اور $لوک$ کو آئندہ اختلاف معنی کے مندرجہ بالا مفہوم کے لحاظ سے استعمال کیا جائیگا۔

۸۴۔ ایک مثبت مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے لیکن اس کے خیالی لوکارتموں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے۔
گزشتہ دفعہ کے نتیجہ میں $ب$ کو صفر کے برابر رکھنے سے

$$لوک عد = ۲ ن خر + ۲۱ + لوک عد$$

اس سے صاف ظاہر ہے کہ لوکارتم کی وسیع تعریف کے ماتحت ہر ایک حقیقی مقدار کا حقیقی لوکارتم صرف ایک ہوتا ہے اور یہ معمولاً $لوک عد$ سے تعبیر کیا جاتا ہے لیکن غیر حقیقی لوکارتم تعداد میں لانا انتہا ہوتے ہیں اور

مؤرخانہ ذکر و کارنامہ، اس حقیقی نوکار نامہ میں ۲۶۸ کا کوئی صنف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) سے بھی براہ راست حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ دفعہ مذکورہ کی مساوات لا تنہا ہی درجہ کی مساوات ہے اس لئے اسکی اصلوں کی تعداد بھی لا تنہا ہی ہے جن میں سے حقیقی صرف ایک ہی ہے۔

یہ امر قابل توجہ ہے کہ لوکار تم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی حقیقی عدد کا جو لوکار تم ہوتا ہے اس کی قیمت خاص، اس عدد کے معمولی جبریرہ لوکار تم کے مساوی ہوتی ہے۔

۸۵۔ کسی منفی مقدار کو لگا رہم۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں رکھو

$$y_+ = \sqrt{z_+ + z_-} \rho + \dots$$

اور مس - ۱ - $\frac{1}{2}$ [جو ایسا زاویہ ہے کہ اسکی جیب التمام $\frac{1}{2}$ یعنی - ۱ ہے اور اس کی جیب صفر ہے بوجہ دفعہ ۲۰] = ۱۱

۲. لوک (-۱) = ۲ ن ۲ خ + ۲ کوک ۱ لا + ۲ خ

اور لوک (- لا) = لوک و لا + خ ۲

لہذا لوکارتم کی وسیع تعریف کے بموجب کسی منفی مقدار (-) کا جو لوکارتم ہوگا اسکی قیمت خاص 'لا' کے معمولی جیریہ لوکارتم اور خا کے مجموعہ کے مساوی ہوگی۔

۸۶۔ ایک ایسی مقدار کا لوکار تم جو بالتمام خیالی ہو۔ دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں عد کو صفر کے مساوی رکھنے سے

$$\text{لوک (خ ب)} = ۲ \text{ ن خ} + ۲ \text{ لوک ر ب} + \frac{۲}{۲} \text{ خ}$$

$$= \text{لوک ب} + \text{خ} (۲ \text{ ن} + \frac{۱}{۲})$$

اس سے ثابت ہوا کہ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو بالتمام خیالی ہو دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے جن میں سے پہلا حصہ حقیقی ہوتا ہے اور دوسرا خیالی اور کثیر القیمت۔

بطور صورت خاص کے یہ $۱ = \text{فرض کروا تب}$

$$\text{لوک (۱-۲)} = \text{خ} (۲ \text{ ن} + \frac{۱}{۲})$$

یعنی لوک (۱-۲) کی قیمت خاص $\frac{۲}{۲} \text{ خ}$ ہوتی ہے۔

۸۷ - دفعہ ۸۳ کے نتیجہ میں

$$\text{ط} = \text{ج ب ط}$$

اور $\text{ب} = \text{ج ب ط رکھو تب}$

$$\text{لوک (ج ب ط + خ ج ب ط)}$$

$$= \text{لوک ب} + \text{خ} (۲ \text{ ن} + ۲ \text{ ط}) = \text{خ ط} + ۲ \text{ ن خ} + ۲ \text{ خ ط}$$

$$\text{اسلئے لوک ب و خ ط} = \text{خ ط} + ۲ \text{ ن خ} + ۲ \text{ خ ط}$$

لہذا لوک ب و خ ط کی قیمت خاص سے یعنی لوک ب و خ ط سے $(۲ \text{ ن} + ۲ \text{ ط})$ کے کی وہ قیمت مراد ہوتی ہے جس سے $۲ \text{ ن} + ۲ \text{ ط} - ۲$ اور $۲ + ۲$ کے درمیان واقع ہو۔

۸۸ - مشق ۱ - ذیل کی رقم کو اس کے حقیقی اور خیالی حصوں میں تقیل کرو۔

$$\text{لوک جب (لا + خ ما)}$$

$$\text{فرض کرو کہ لوک جب (لا + خ ما) = ی + خ د}$$

$$\text{جس سے ی + خ د = جب (لا + خ ما)}$$

$$= \text{جب لا جم خما} + \text{جم لا جب خما}$$

$$= \text{جب لا} \left(\frac{ق_1 + ق_2}{2} \right) + \text{خجم لا} \left(\frac{ق_1 - ق_2}{2} \right) \dots (۱)$$

بوجب دفعہ ۱۸ فرض کرو کہ مساوات بالا کی بائیں جانب کارکن

$$r \left[\text{جم} (۲ن + ۲ط) + \text{خجم} (۲ن - ۲ط) \right]$$

کے مساوی ہے، اسلئے

$$r = \frac{\text{جب لا} \left(\frac{ق_1 + ق_2}{2} \right) + \text{خجم لا} \left(\frac{ق_1 - ق_2}{2} \right)}{\frac{1}{2} \sqrt{(ق_1 + ق_2)^2 - ۲ \text{جم} ۲ لا}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(ق_1 + ق_2)^2 - ۲ \text{جم} ۲ لا}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{۲ \text{جم} ۲ لا - ۲ \text{جم} ۲ لا}$$

$$= \frac{۲ \text{جم} ۲ لا - ۲ \text{جم} ۲ لا}{2} =$$

$$\text{اور ط} = \text{مس} ۱ - \left[\text{جم لا} \left(\frac{ق_1 - ق_2}{2} \right) + \frac{ق_1 + ق_2}{2} \right] = \text{مس} ۲ \left[\text{جم لا مس} ۲ \right]$$

اس میں ط اپنی قیود کے ماتحت ہے جو دفعہ ۲۰ میں بیان کی گئی ہیں۔

تب مساوات (۱) سے

$$\text{قوی} (\text{جم} + \text{خجم} + \text{د}) = r \left\{ \text{جم} (۲ن + ۲ط) + \text{خجم} (۲ن - ۲ط) \right\}$$

$$\text{اسلئے قوی} = r \text{ جس سے ی} = \text{لوک} r$$

$$\text{اور د} = ۲ن + ۲ط$$

$$\therefore \text{لوک جب} (لا + خ) = ی + خو$$

$$= \text{لوک} r + (۲ن + ۲ط) خ$$

$$= \frac{1}{4} \text{ لوک } \left[\frac{\text{جم} - ۱۷}{۲} \right] + \text{خ} [۲ن + ۱۱ - ۱ (م لا سنا)]$$

اس میں ن کو صفر کرنے سے لوک جب (لا + خ) کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے۔

مشق ۲۔ لوک (۳-) کی عام قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ

$$\text{لا} + \text{خ} = \text{لوک} (۳-)$$

$$\text{اسلئے} \quad \text{ولا} + \text{خ} = ۳ -$$

دفعہ ۸ کی طرح

$$۳- = \{ \text{جم} (۲ن + ۱۱) + \text{خ جب} (۲ن + ۱۱) \} \text{ رکھو۔}$$

$$\text{تب} \quad ۳ = \text{ر} \quad \text{اور} \quad ۳ = \text{ط}$$

$$\text{اسلئے} \quad ۳ \{ \text{جم} (۲ن + ۱۱) + \text{خ جب} (۲ن + ۱۱) \}$$

$$= \text{ولا} + \text{خ} = \text{ولا} \times \text{وخ}$$

$$= \text{ولا} \{ \text{جم} + \text{خ جب} \}$$

$$\text{لہذا} \quad \text{ولا} = ۳ \text{ جس سے لا} = \text{لوک } ۳ \text{ اور } \text{لا} = ۲ن + ۱۱$$

$$\therefore \text{لوک} (۳-) = \text{لوک } ۳ + (۲ن + ۱۱) \text{ خ}$$

اس میں ن کو صفر کے مساوی رکھنے سے اس کی قیمت خاص

$$\text{لوک } ۳ + \text{خ}$$

حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ ۱۳

ثابت کرو کہ

$$۱۔ \text{لوک} (\text{جم} + \text{خ جب} \text{ط}) = \text{خ ط} \quad \text{اگر} \quad ۱۱ > \text{ط} + ۴$$

— 2 —

لوک (۱-) = π

- 2 -

لوک (x) = $\frac{m}{x}$

—

$$\text{لوک (۱+ حجم ۲ طه + خر جب ۲ طه)} = \text{لوک (۲ حجم طه)} + \text{خر طه}$$

اگر $n > 6$ نہ

-d

$$\text{لوک مس} \left(\frac{14}{4} + \frac{27}{4} \right) = \text{خر مس} - \text{اجینر لا}$$

4

$$\text{لوک جسم (لا + سزا)} = \frac{1}{p} \text{ لوک } \left(\frac{\text{جزم} + \text{جم}}{p} \right)$$

-خمس-۱ (مس لاسنما)

- 4 -

لوک $\frac{\text{جب (۱+خرما)}}{\text{جب (۱-خرما)}} = ۲$ خرما مسا (مم لا مسنیو)

— A

$$\text{لوک} = \frac{\text{جم (لا - خا)}}{\text{جم (لا + خا)}} = 2 \text{ خ مسرا (مس لاسنرا)}$$

-9

مخروک $\frac{\lambda - \chi}{\lambda + \chi} = 2 - \pi$ مستلا

۱۰۔ لوک (۱+خمس ع) = لوک قطعہ + خمسہ جہاں ع سے مراد

کوئی مثبت حادہ زاویہ ہے،

$$\text{لوک} = \left(\frac{1}{-1 + \sqrt{2}} \right) = \text{لوک}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)$$

- 12

$$\text{لوک} = \frac{1 + x_B}{x_B - 1} = 2 \text{ منس } \frac{1}{A}$$

513

$$\text{لوك} (-5) = \text{لوك} 5 + (2 \times 2) + 2 \times (-5)$$

12

لوک $(x+1) = \frac{1}{p}$ لوک، $x+2$ (۲ ن $\frac{p}{p} + 1$)

-10

لوک لوک جب (لا + خم) کی قیمت معلوم کرو۔

۸۹۔ Δ کی تعریف جب Δ اور Δ کوئی حقیقی یا ملف مقادیر ہوں

جب Δ اور Δ حقیقی مقادیر ہوں تو ہم جانتے ہیں کہ

$$\Delta = \text{فول کوک} \Delta \dots\dots\dots (\text{دفعہ ۵})$$

لیکن جب Δ اور Δ دونوں ملف ہوں تو Δ کی معمولی جبریہ تعریف قائم نہیں رہتی۔

فرض کرو کہ ہم اس کی (یعنی Δ کی) تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ Δ اور Δ کی تمام قیمتوں کے واسطے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا ملف $\Delta = \text{فول کوک} \Delta$

اب بموجب دفعہ ۸۳ اگر Δ ملف ہو تو Δ کثیر القیمت اور ملف

ہوگا۔ یعنی Δ بھی کثیر القیمت اور ملف ہوگا۔

$$\Delta = \text{فول کوک} \Delta = \text{فول کوک} \Delta \dots\dots\dots (\text{۲۲ کوک} \Delta)$$

Δ کی اس قیمت میں اگر Δ کو صفر کر دیا جائے تو محصلہ قیمت Δ کی قیمت خاص کہلاتی ہے۔

یعنی Δ کی قیمت خاص

$$= \text{فول کوک} \Delta$$

$$= 1 + \Delta \text{ کوک} \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} (\text{کوک} \Delta)^2 + \dots\dots\dots (\text{دفعہ ۵۶})$$

دفعہ ۵۶ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر صرف خاص قیمتوں کا لحاظ رکھا جائے تو

$$\Delta^2 \times \Delta = \Delta^3$$

یعنی Δ کی قیمت خاص قوت نماؤں کے جبریہ ضابطہ کو پورا کرتی ہے۔

۹۰۔ یہ بھی آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ اگر Δ ملف ہو تو

$$\text{کوک} \Delta = (1 + \Delta) = \Delta - \frac{1}{2!} \Delta^2 + \frac{1}{3!} \Delta^3 - \frac{1}{4!} \Delta^4 + \dots\dots\dots \text{تالائنا ہی}$$

اس کا ثبوت بھی اُس ثبوت کے بعینہ متشابہ ہے جو ما کے حقیقی ہونے کی صورت میں دیا گیا ہے۔ دیکھو دفعہ ۸

بالعموم یہ ضروری ہے کہ ما کا مقیاس ایک سے کم ہو کیونکہ ملث مقداروں کے لئے مسئلہ ثنائی صرف اسی صورت میں درست ہے دیکھو دفعہ ۲۶

جب ما کا مقیاس ایک کے مساوی ہو یعنی جب ہم ما کو جم مذ + خر جب مذ کے مساوی فرض کر سکیں تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ تفصیل بالا درست ہوگی سوائے اُس صورت کے جبکہ مذ، ۲ کا کوئی طاق صنف ہو۔

چونکہ لوک (۱ + ما) = ۲ ن خر + ۲ لوک (۱ + ما)

اس لئے لوک (۱ + ما) = ۲ ن خر + ما - ۱/۴ + ۱/۴ - ۱/۴ + ... تا لا تساہی

۹۱۔ جملہ (عہ + خر بہ) + خر ما کے خیالی اور حقیقی حصوں کو الگ الگ کر دو

فرض کر دو کہ عہ + خر بہ = ر (جم طہ + خر جب طہ)

یعنی بموجب دفعہ ۱۸

$$ر = \frac{ر}{عہ + خر بہ} \text{ اور } طہ = مس - \frac{۱}{عہ}$$

لہذا حسب تعریف

(عہ + خر بہ) + خر ما = و (لا + خر ما) لوک (عہ + خر بہ)

= و (لا + خر ما) {لوک (عہ + خر بہ) + ۲ م خر}

= و (لا + خر ما) {لوک (عہ + خر بہ) + ۲ م خر}

= و (لا لوک ر - ما (۲ م خر + ۲ م خر)) + خر {ما لوک ر + لا (۲ م خر + ۲ م خر)}

= و (لا لوک ر - ما (۲ م خر + ۲ م خر)) + خر {ما لوک ر + لا (۲ م خر + ۲ م خر)}

= و (لا - ما (۲ م خر + ۲ م خر)) + خر {ما لوک ر + لا (۲ م خر + ۲ م خر)}

+ خ جب { ۱ لوک ر + لا (ط + ۲ م ۲) }
اگر ہم م کو صفر کر دیں تو جملہ مندرجہ بالا کی قیمت خاص معلوم ہو سکتی ہے جو حسب ذیل ہے۔

۴۲ - مشق ۱ - (۱-۲) = ۱-۲ کی قیمت عامہ معلوم کر دو۔

$$(1-2) = 1-2 = 1-2$$

لیکن لوک ۱-۲ = لوک [جم (۲ ن ۲ + ۲) + خ جب (۲ ن ۲ + ۲)]

$$= \text{لوک } (1-2) = \text{لوک } (2 \text{ ن } 2 + 2) + \text{خ جب } (2 \text{ ن } 2 + 2)$$

جہاں ن سے کوئی صحیح عدد مراد ہے
 نیز (۱-۲) کی قیمت خاص ہو - ۲ ہے۔

مشق ۲ - لوک ۳ - کی قیمت عامہ معلوم کر دو۔

فرض کر دو کہ لوک ۳ = (۳ -) لا + خ ۱ یعنی ۳ = لا + خ ۱
 یعنی (لا + خ ۱) لوک ۳ = ۳ [جم (۲ م ۲ + ۲) + خ جب (۲ م ۲ + ۲)] ... دفعہ ۲۰
 لیکن لوک ۲ = ۲ ن ۲ خ ۲ + لوک ۲ اور ۳ = لوک ۲
 ∴ (لا + خ ۱) (۲ ن ۲ خ ۲ + لوک ۲) = لوک ۲ × ۳
 ∴ (لا + خ ۱) (۲ ن ۲ خ ۲ + لوک ۲) = لوک ۲ (۳ + ۲ م ۲ + ۲) خ

حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

لا لوک ۲ - ۲ ن ۲ = لوک ۲

اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

لا × ۲ ن ۲ + ۱ لوک ۲ = ۲ م ۲ + ۲

و $\frac{2}{n} = \frac{2}{n}$ جم (لوک ۲) ہے۔

۱۰۔ ثابت کر دو کہ (۱+خ ب) کی قیمت خاص بالتمام حقیقی ہوگی اگر

$$\frac{1}{4} \text{ بہ لوک } (1 + 2 \text{ ب}) + \text{ع مس} - 1 - \frac{1}{4} \text{ ب}$$

$\frac{2}{n}$ کا کوئی جنت ضعف ہو اور خیالی ہوگی اگر یہ $\frac{2}{n}$ کا کوئی طاق ضعف ہو۔

۱۱۔ ثابت کر دو کہ (۱+خ مس ع) کی قیمت عام

و $\frac{2}{n} = \frac{2}{n}$ جم {لوک جم ع} + {خ جب} {لوک جم ع} ہے۔

۱۲۔ اگر $(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}) = \frac{2}{n}$ خ ما

تو ثابت کر دو کہ مس ۱ - $\frac{1}{8}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

لہ مس ۱ - $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8})$ بہ لوک $(\frac{2}{n} + \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{4}))$ ہوگی

۱۳۔ ثابت کر دو کہ لوک $(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$

جہاں م اور ن سے کوئی صحیح اعداد مراد ہیں۔

۱۴۔ ثابت کر دو کہ لوک $(1 - \frac{1}{2})$ کی عام قیمت

$$\text{ہے } \frac{2 \text{ لوک } (1 + \frac{2}{n}) + 2 \text{ لوک } (1 - \frac{1}{2})}{2 \text{ لوک } (1 + \frac{2}{n}) + 2 \text{ لوک } (1 - \frac{1}{2})} + \frac{2 \text{ لوک } (1 - \frac{1}{2})}{2 \text{ لوک } (1 + \frac{2}{n}) + 2 \text{ لوک } (1 - \frac{1}{2})}$$

بتاؤ کہ ذیل کے دوسلوں میں جو استدلال کیا گیا ہے، اس میں کہاں غلطی ہے؟

۱۵۔ جب ن کوئی صحیح عدد ہو تو

$$2 \text{ لوک } \frac{2}{n} = 2 \text{ جم } \frac{2}{n} + 2 \text{ خ جب } \frac{2}{n} = 1$$

$$\text{یعنی } 2 \text{ لوک } \frac{2}{n} = 2 \text{ لوک } \frac{2}{n} = 2 \text{ لوک } \frac{2}{n} = \dots \dots \dots$$

ان سب کو ۱- کی قوت پر اٹھانے سے

$$\dots\dots\dots = \pi^4 - \pi^2 = \pi^2 - \pi^0 = \pi^0 - \pi^{-2} = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \pi^4 = \pi^2 = \pi^0 = \pi^{-2} = \dots\dots\dots$$

۱۶۔ طہ کی تمام قیمتوں کے واسطے

$$\text{جم}(\pi - \pi) + \text{خر}(\pi - \pi) = \text{جم}(\pi + \pi) + \text{خر}(\pi + \pi)$$

$$\text{یعنی} \quad \text{خر}(\pi - \pi) = \text{خر}(\pi + \pi)$$

$$\text{لہذا} \quad \pi - \pi = \pi + \pi \quad \text{یعنی} \quad \pi = \pi$$

۱۷۔ اگر لا اور ما دو ملتف عدد ہوں اور ان کی سمت کی خاص قیمتیں طہ اور ذہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لوک لا} = \text{لوک لا} + \text{لوک ما} + \pi \text{ ن خر}$$

$$\text{جہاں} \quad \pi = ۱, \text{ اگر طہ + ذہ بڑا ہو } \pi \text{ سے}$$

$$\text{یا} \quad \pi = ۰, \text{ اگر طہ + ذہ بڑا ہو } - \pi \text{ سے اور بڑا نہ ہو } \pi \text{ سے}$$

$$\text{یا} \quad \pi = \text{اگر طہ + ذہ بڑا نہ ہو } - \pi \text{ سے}$$



۱۰۱
۱۰۲
۱۰۳
۱۰۴
۱۰۵
۱۰۶
۱۰۷
۱۰۸
۱۰۹
۱۱۰
۱۱۱
۱۱۲
۱۱۳
۱۱۴
۱۱۵
۱۱۶
۱۱۷
۱۱۸
۱۱۹
۱۲۰
۱۲۱
۱۲۲
۱۲۳
۱۲۴
۱۲۵
۱۲۶
۱۲۷
۱۲۸
۱۲۹
۱۳۰
۱۳۱
۱۳۲
۱۳۳
۱۳۴
۱۳۵
۱۳۶
۱۳۷
۱۳۸
۱۳۹
۱۴۰
۱۴۱
۱۴۲
۱۴۳
۱۴۴
۱۴۵
۱۴۶
۱۴۷
۱۴۸
۱۴۹
۱۵۰

باب ہفتم

V. Day

گرگوری کا سلسلہ - ۱۱ کی قیمت کا محسوب کرنا
۹۳ - گرگوری کا سلسلہ -

ثابت کرو کہ اگر طہ - $\frac{11}{12}$ سے کم نہ ہو اور $\frac{11}{12}$ سے زیادہ نہ ہو تو
طہ = مس طہ - $\frac{1}{12}$ مس طہ + $\frac{1}{12}$ مس طہ - تا لانتہائی
ظاہر ہے کہ

$$+ 1 \text{ مس طہ} = \text{قط طہ} (\text{جم طہ} + \text{خر جب طہ})$$

$$= \text{قط طہ} \times \text{فوط طہ}$$

اس لئے دفعہ ۸۳ کی مدد سے

$$\text{لوک پو قط طہ} + \text{خر طہ} = \text{لوک} (1 + \text{خر مس طہ})$$

اس لئے دفعہ ۹۰ کی رو سے اگر مس طہ تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو

$$\text{لوک پو} (\text{قط طہ}) + \text{خر طہ}$$

$$= \text{لوک} (1 + \text{خر مس طہ})$$

$$= \text{خر مس طہ} - \frac{1}{4} \text{خر مس طہ} + \frac{1}{12} \text{خر مس طہ} - \dots\dots\dots$$

$$= \text{خر مس طہ} + \frac{1}{4} \text{خر مس طہ} - \frac{1}{12} \text{خر مس طہ} + \dots\dots\dots \text{تا لانتہائی}$$

اس مساوات کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{طہ} = \text{مس طہ} - \frac{1}{3}\text{مس}^2 \text{طہ} + \frac{1}{6}\text{مس}^3 \text{طہ} - \frac{1}{2}\text{مس}^4 \text{طہ} + \dots \dots \dots \text{تا انتہائی}$$
 (۱)

ظاہر ہے کہ یہ سلسلہ اُن حادہ زاویوں کے لئے درست ہے جن کا مس
 تعداداً ایک سے بڑا نہیں ہوتا گویا یہ سلسلہ اُن سب زاویا کے لئے جو - $\frac{\pi}{2}$
 اور + $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہوتے ہیں اور نیز زاویا - $\frac{\pi}{2}$ اور + $\frac{\pi}{2}$
 کے لئے درست ہے۔

۹۵۔ دفعہ ما قبل کے سلسلہ میں اگر ہم مس طہ کی بجائے لا لکھیں یعنی
 جب لا بڑا نہ ہو، سے اور چھوٹا نہ ہو، اسے تو ہم سلسلہ بالا کو ذیل کی شکل میں
 بھی لکھ سکتے ہیں

مس' لا = لا - $\frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{1}{6}\text{لا}^5 - \frac{1}{2}\text{لا}^7 + \dots \dots \dots$ تا انتہائی
 جہاں مس' لا کی قیمت - $\frac{\pi}{2}$ اور + $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہے۔
 ۹۶۔ گرگوری کا سلسلہ ذیل کے عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔
 اگر زاویہ طہ کی قیمت ف - $\frac{\pi}{2}$ اور ف + $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع
 ہو یا ان دو انتہائی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو

طہ - ف = مس طہ - $\frac{1}{3}\text{مس}^3 \text{طہ} + \frac{1}{6}\text{مس}^5 \text{طہ} - \dots \dots \dots$ تا انتہائی
 فرض کرو کہ طہ = ف + ف جہاں ف، سے بڑا نہیں ہے اور
 - $\frac{\pi}{2}$ سے چھوٹا نہیں ہے۔

تب ۱ + مس طہ = ۱ + مس ف = قط ف (جم ف + خر جب ف)

= قط ف × مو ف

لہذا اگر مس طہ تعداداً ایک سے بڑا نہ ہو تو دفعات ۸۳ اور ۹۰ کی رو سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوک} \cdot \text{قطفہ} + \text{خرفہ} = \text{لوک} (۱ + \text{خمس طہ})$$

$$= \text{خمس طہ} - \frac{1}{4} \text{خمس طہ} + \frac{1}{4} \text{خمس طہ} - \frac{1}{16} \text{خمس طہ} + \frac{1}{16} \text{خمس طہ} - \dots$$

$$= \text{خمس طہ} + \frac{1}{4} \text{خمس طہ} - \frac{1}{16} \text{خمس طہ} + \frac{1}{16} \text{خمس طہ} - \dots$$

$$+ \frac{1}{64} \text{خمس طہ} - \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

مساوات بالا کے ہر دو جانب کے خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے $\text{خرفہ} = \text{مس طہ} - \frac{1}{4} \text{مس طہ} + \frac{1}{16} \text{مس طہ} - \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$ یعنی طہ - ف = $\frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{1}{16} \text{مس طہ} + \frac{1}{64} \text{مس طہ} - \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$ (۱) خاص صورتیں -

اگر طہ، $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ کے درمیان یعنی $\frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور $\frac{3}{4} \text{مس طہ} + \frac{3}{4} \text{مس طہ}$ کے درمیان واقع ہو تو ظاہر ہے کہ ف = ۱، تب دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے :-

$$\text{طہ} - \frac{3}{4} \text{مس طہ} = \frac{1}{4} \text{مس طہ} + \frac{1}{16} \text{مس طہ} - \frac{1}{64} \text{مس طہ} + \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

اگر طہ، $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ کے درمیان یعنی $\frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور $\frac{3}{4} \text{مس طہ} + \frac{3}{4} \text{مس طہ}$ کے درمیان واقع ہو تو مساوات مذکورہ حسب ذیل ہو جاتی ہے -

$$\text{طہ} - \frac{3}{4} \text{مس طہ} = \frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{1}{16} \text{مس طہ} + \frac{1}{64} \text{مس طہ} - \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

اسی طرح سے اگر طہ، $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور $\frac{3}{4} \text{مس طہ}$ کے درمیان یعنی $\frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{3}{4} \text{مس طہ}$ اور

$$\frac{3}{4} \text{مس طہ} + \frac{3}{4} \text{مس طہ}$$

$$\text{طہ} + \frac{3}{4} \text{مس طہ} = \frac{3}{4} \text{مس طہ} - \frac{1}{16} \text{مس طہ} + \frac{1}{64} \text{مس طہ} - \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

$$۹۸ - \text{اگر طہ، } \frac{3}{4} \text{مس طہ اور } \frac{3}{4} \text{مس طہ کے درمیان یا } \frac{3}{4} \text{مس طہ اور } \frac{3}{4} \text{مس طہ کے درمیان}$$

..... یا بالعموم $n + \frac{n}{2}$ اور $n + \frac{n}{3}$ کے درمیان واقع ہو تو مسطہ تعداد ایک سے بڑا ہوگا۔ اسلئے ان صورتوں میں لوک (۱+۳ مسطہ) کی تفصیل برقرار نہیں رہیگی، بنا بریں دفعہ ۹۶ کی تفصیل (۱) کی کسی کوئی تفصیل حاصل نہیں ہوگی۔

۹۹- ۱۱ کی قیمت

گر گوری کے سلسلہ کا ایک خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کے استعمال سے ۱۱ کی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

دفعہ ۹۵ میں لا = ۱ رکھو، تب

$$\frac{11}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \dots$$

$$1 = \left[\dots + \frac{1}{13 \times 11} + \frac{1}{9 \times 7} + \frac{1}{5 \times 3}\right] - 1$$

اس سلسلہ سے ۱۱ کی قیمت محسوب کی جاسکتی ہے۔ لیکن اس سلسلہ میں بڑا نقص یہ ہے کہ اس کی رقمیں جلدی جلدی کم نہیں ہوتیں، اس لئے اگر ۱۱ کی قیمت کافی حد تک درست نکالنا مقصود ہو تو رقوم کی ایک بڑی تعداد لینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ لامحالہ اور سلسلے جو بڑے بڑے ہیں۔

۱۰۰- آئیلر کا سلسلہ

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{11}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

دفعہ ۹۵ میں لا کو بالترتیب

$$\frac{1}{3} \text{ اور } \frac{1}{4}$$

کے مساوی رکھو۔ تب

$$\frac{11}{3} = \frac{11}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$$

یہ سلسلہ دفعہ ماقبل کے سلسلہ کی نسبت زیادہ جلدی جلدی گھٹتا ہے لیکن ۱۱ کی قیمت کو اعتدال کے ساتویں مقام تک درست نکالنے کے لئے $\frac{11}{3}$ کے سلسلہ میں ۱۱ سے زیادہ رقوم لینے کی ضرورت ہے۔

۱۰۱۔ میکن کا سلسلہ

مندرجہ بالا سلاسل سے زیادہ مستحق سلسلہ میکن کا دریافت کردہ ہے جو ذیل کی مساوات سے ماخوذ ہوتا ہے۔

$$\frac{11}{3} = \frac{11}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

..... دفعہ ۲۳۹ حصہ اول مشق ۴

دفعہ ۹۵ میں لا کی بجائے بالترتیب $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{3}$ رکھنے سے

$$\left[\dots\dots + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] \frac{11}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\left[\dots\dots - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] -$$

$$\left[\dots\dots + \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] \frac{11}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\left[\dots\dots - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] \frac{11}{3} =$$

$$۳۶۲ = \frac{۲}{۱۰} \times ۱۶$$

$$۵۰۰۱۰۲۴ = \frac{۲}{۵۱۰} \times \frac{۱}{۵} \times ۱۶$$

$$۵۰۰۰۰۰۰۹۱۰۲ = \frac{۹۲}{۹۱۰} \times \frac{۱}{۹} \times ۱۶$$

.....

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۹۶۶ = \frac{۱}{۳۳۹} \times \frac{۱}{۳} \times ۲$$

$$۳۶۲۰۱۰۲۵۰۰۰۶۹$$

$$۵۰۴۲۶۶۶۶۶۶۶... = \frac{۲۲}{۲۱۰} \times \frac{۱}{۳} \times ۱۶$$

$$۵۰۰۰۰۰۲۹۲۵۶۱... = \frac{۲}{۶۱۰} \times \frac{۱}{۲} \times ۱۶$$

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۲۹۸... = \frac{۸۲}{۱۱۱۰} \times \frac{۱}{۱۱} \times ۱۶$$

.....

$$۵۰۱۶۶۳۶۴۰۱۶... = \frac{۱}{۲۳۹} \times ۲$$

$$۵۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

$$۳۶۲۰۱۰۲۵۰۰۰۶۹$$

لہذا

$$-۵۰۵۹۴۳۲۳۵۵۲$$

$$۳۶۱۴۱۵۹۲۶۵/۲۶ = ۲$$

۲ کی یہ قیمت اعشاریہ کے آٹھویں مقام تک درست ہے۔

اگر پہلے سلسلہ میں سے ۲۱ رقوم لی جائیں اور دوسرے سلسلہ

میں سے ۳، تو ۲ کی قیمت اعشاریہ کے سولہویں مقام تک درست نکالی جاسکتی ہے

۱۰۲- رویتھر فورڈ کا سلسلہ

سیکن کے سلسلہ کو ذیل کی مساوات اور بھی آسان بنا دیتی ہے۔

$$\begin{aligned} ۴ \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۶} \text{ مس}^۱ + \frac{۱}{۹۹} \text{ مس}^۱ &= \frac{۲}{۹۹} \\ \text{کیونکہ مس}^۱ - \frac{۱}{۶} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۱ &= \frac{۱}{۹۹} \\ \frac{\frac{۱}{۹۹} - \frac{۱}{۶} \text{ مس}^۱ - \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۱}{\frac{۱}{۹۹} \times \frac{۱}{۵} + ۱} & \end{aligned}$$

$$\text{مس}^۱ = \frac{۲۹}{۹۹۳۱} \text{ مس}^۱ = \frac{۱}{۲۳۹}$$

امثلہ ۱۵

اگر یہ تقسیم کر لیا جائے کہ

$$\text{ط} - \text{ن} = ۲ = \text{مس}^۱ - \frac{۱}{۳} \text{ مس}^۳ + \frac{۱}{۵} \text{ مس}^۵ - \dots$$

تو ن کی قیمت معلوم کرو جبکہ ط ذیل کی رقوم کے درمیان واقع ہو

$$\begin{aligned} (۱) \quad \frac{۲}{۱۱} \text{ اور } \frac{۲}{۱۳} \text{ کے} & \quad (۲) \quad \frac{۲}{۴} \text{ اور } \frac{۲}{۹} \text{ کے} \\ (۳) \quad \frac{۲}{۱۹} \text{ اور } \frac{۲}{۲۱} \text{ کے} & \quad (۴) \quad \frac{۲}{۳۳} \text{ اور } \frac{۲}{۳۵} \text{ کے} \\ (۵) \quad \frac{۲}{۱۱} \text{ اور } \frac{۲}{۱۳} \text{ کے} & \end{aligned}$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\{ ۱ - \frac{۱}{۲۳} + \frac{۱}{۲۳ \times ۵} - \frac{۱}{۲۳ \times ۵} + \dots \} = ۲$$

۷۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - \left(\frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۳۵} \right) - \dots$$

۸۔ اگر لا > ۱-۲۱ تو ثابت کرو کہ

$$۲ \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \dots \right) \text{ سالانہ ہی}$$

$$= \frac{۲}{۱-۲۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \left(\frac{۲}{۱-۲۱} \right) - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} \left(\frac{۲}{۱-۲۱} \right) - \dots \text{ سالانہ ہی}$$

ذیل کے سلسلوں سے ۱۱ کی قیمت محسوب کرو جو اعداد کے تیسرے مقام تک درست ہو۔

۹- آئیلر کے سلسلے سے

۱۰- میکن کے سلسلے سے

۱۱- روتھر فورڈ کے سلسلے سے

۱۲- ثابت کرو کہ دوسرے مرتبہ کی مقادیر صغیر تک

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \text{جب } p \text{ نوک } (1-p) + \text{مس } p \text{ جب } \left(\frac{p}{p} + p\right)$$

$$= \frac{1-3p}{p}$$

۱۳- اگر p اور $\text{مس } p$ (قططہ) دونوں صغیر اور $\frac{p}{p}$ کے درمیان واقع ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } p \text{ (قططہ)} = \frac{p}{p} + \text{مس } p - \frac{1}{p} \text{ مس } p + \frac{1}{p} \text{ مس } p - \dots$$

$$\frac{p}{p} + \text{مس } p = \frac{p}{p} + \text{مس } p = \frac{p}{p} + \text{مس } p$$

$$\frac{p}{p} + \text{مس } p = \frac{p}{p} + \text{مس } p = \frac{p}{p} + \text{مس } p$$

باب ہشتم

سلسلوں کو جمع کرنا

سلسلوں میں پھیلانا

۱۰۳- اب ہم گزشتہ ابواب کے نتائج کو چند مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرنے میں استعمال کریں گے۔

مشہور سلسلوں کو چار اقسام میں منقسم کیا جاسکتا ہے

(۱) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر سلسلہ ہندسیہ پر مبنی ہوتی ہے۔

(۲) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ ثنائی پر مبنی ہوتی ہے۔

(۳) وہ سلسلے جن کی جمع بالآخر مسئلہ قوت نما پر (جیب اور جیب النہام کے سلسلے بھی اسی میں شامل ہیں) منحصر ہوتی ہے۔

(۴) وہ سلسلے جن کی جمع لوکار تھی سلسلہ پر (گرگوری کا سلسلہ بھی اسی میں شامل ہے) منحصر ہوتی ہے۔

۱۰۴- دفعات ۱۰۵-۱۰۸ میں ہم مندرجہ بالا اقسام میں سے ایک ایک سلسلہ بطور مثال جمع کریں گے۔

نیز جب ضلعی زاویوں کی جیوب (مثلاً جب α ، جب β ، جب γ) کے کسی سلسلہ کو جمع کرنا مقصود ہو تو ابھی معلوم ہو جائیگا کہ بالعموم انہی ضلعی زاویوں کی جیوب اتمام (مثلاً جم α ، جم β ، جم γ)

کے ایک رفیق سلسلہ کو بھی ساتھ ہی جمع کرنا آسان اور سہولت بخش ہوتا ہے۔ یہ طریقہ ذیل کی چار دفعات کو بغور پڑھنے سے بخوبی سمجھ میں آجائے گا۔

۱۰۵۔ مشق۔ سلسلہ

۱+ج جم عہ + ج جم ۲ عہ + ج جم ۳ عہ +
کون رقوم تک اور نیز لاتنا ہی تک جمع کرو، اس میں ج ایک سے کم فرض کرو کہ

$$۴ \equiv ۱+ج جم عہ + ج جم ۲ عہ + ج جم ۳ عہ + (۱)$$

$$\text{اور } ۵ \equiv ۱+ج جب عہ + ج جب ۲ عہ + (۲)$$

(۲) کو خ سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

$$۴+خ ج = ۱+ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج (جم ۲ عہ + خ جب ۲ عہ) + \\ = ۱+ج (خ عہ + ج خ عہ + + ج (خ عہ + ج خ عہ + (دفعہ ۲۲)$$

$$= \frac{۱-ج خ عہ}{۱-ج خ عہ} \dots \dots \dots \text{سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے}$$

$$(۱-ج خ عہ) (۱-ج خ عہ)$$

$$= (۱-ج خ عہ) (۱-ج خ عہ)$$

$$= \frac{۱-ج خ عہ - ج خ عہ + ج خ عہ + ج خ عہ + + ج خ عہ}{۱-ج (خ عہ + ج خ عہ) + ج ۲}$$

$$= ۱+ج (جم عہ + خ جب عہ) + ج (جم ۲ عہ + خ جب ۲ عہ) + ج (جم ۳ عہ + خ جب ۳ عہ) + (۱-ج خ عہ)$$

$$۱-۲ ج جم عہ + ج ۲$$

پس حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

$$م = \frac{ج - جیم - ج^۳ جم - ج^۵ + ج^{۱۰} جم (ن - ۱) - عہ}{۱ - ج - جیم - ج^۲}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$ج = \frac{ج جب - ج^۳ جب - ج^۵ + ج^{۱۰} جب (ن - ۱) - عہ}{۱ - ج - جیم - ج^۲}$$

اگر سلسلہ ہذا کا حاصل جمع لاتنا ہی تک معلوم کرنا مطلوب ہو تو اُن رقوم کو جن میں ج^۱ اور ج^۵ شامل ہیں چھوڑ دینا کافی ہو گا کیونکہ جب ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے تو یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں۔

$$پس م = \frac{ج - جیم - ج^۳ جم - ج^۵ + ج^{۱۰} جم (ن - ۱) - عہ}{۱ - ج - جیم - ج^۲}$$

$$اور ج = \frac{ج جب - ج^۳ جب - ج^۵ + ج^{۱۰} جب (ن - ۱) - عہ}{۱ - ج - جیم - ج^۲}$$

[نوٹ - م اور ج کے لئے جو رقوم اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ سلاسل زیر بحث کی جمع، خیالی مقادیر کے استعمال کے بغیر بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

مساوات (۱۱) و (۱۲) کے دونوں جانب مقدار ۱ - ج^۲ جم - ج^۵ + ج^{۱۰} کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہو گا کہ ج^۱، ج^۳، ج^۵، ج^۷، ج^۹ کے سر غائب ہو جاتے ہیں اور بعدہ، ص اور ج کی قیمتیں آسانی معلوم ہو جاتی ہیں۔]

۱۰۶۔ مشق - سلسلہ

$$\frac{۱}{۲} جب - عہ + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۲} جب ۲ - عہ + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} جب ۳ - عہ + \dots$$

تالانتا ہی کو جمع کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ ج} = \frac{1}{p} \text{ جب } x \text{ } + \frac{3x}{p \times 2} \text{ جب } x^2 \text{ } + \frac{5x^3}{p \times 2 \times 2} \text{ جب } x^3 \text{ } + \dots$$

$$\text{اور م} = 1 + \frac{1}{p} \text{ جم } x \text{ } + \frac{3x}{p \times 2} \text{ جم } x^2 \text{ } + \frac{5x^3}{p \times 2 \times 2} \text{ جم } x^3 \text{ } + \dots$$

اس لئے پہلے سلسلہ کو خ سے ضرب دیکر دوسرے سلسلہ میں جمع کرنے سے

$$\text{م} + \text{خ ج} = 1 + \frac{1}{p} \text{ } x \text{ } + \frac{3x}{p \times 2} \text{ } x^2 \text{ } + \frac{5x^3}{p \times 2 \times 2} \text{ } x^3 \text{ } + \dots$$

$$= (1 - x^p) \left(\frac{1}{p} - x^p \right) \text{ اگر } x^p = 2 \text{ } n$$

سلسلہ ثنائی کی رو سے... (دفعہ ۲۶)

$$= \text{م} + \text{خ ج} = \left\{ 1 - \text{جم } x \text{ } - \text{خ جب } x^2 \text{ } \right\} \frac{1}{p}$$

$$= \left\{ 2 \text{ جب } x^2 \text{ } \left(\text{جب } x^2 \text{ } - \frac{3}{p} \text{ جم } x \text{ } \right) \right\} \frac{1}{p}$$

$$= \left\{ 2 \text{ جب } x^2 \text{ } \left\{ \left(\frac{p}{p} - \frac{3}{p} \right) \text{ خ جب } x^2 \text{ } + \left(\frac{p}{p} - \frac{3}{p} \right) \text{ جم } x \text{ } \right\} \right\} \frac{1}{p}$$

$$= \left\{ 2 \text{ جب } x^2 \text{ } \left\{ \text{جم } x \text{ } + \text{خ جب } x^2 \text{ } \right\} \right\} \frac{1}{p} = \frac{2 - p}{p}$$

اب حقیقی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{م} = \left\{ 2 \text{ جب } x^2 \text{ } \left\{ \text{جم } x \text{ } + \text{خ جب } x^2 \text{ } \right\} \right\} \frac{1}{p} = \frac{2 - p}{p}$$

اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \left\{ 2 \text{ جب } x^2 \text{ } \left\{ \text{جب } x^2 \text{ } \left(\frac{2 - p}{p} \right) \right\} \right\} \frac{1}{p}$$

$$\text{اگر } x^p = 2 \text{ } n \text{ } 0 = \text{ج} \text{ } \text{اور } \text{م} = \infty$$

۱۶ مثلہ

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو:-

$$(۱) \text{ جب } ۱ع + \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۲ع + \frac{۱}{۳} \text{ جب } ۳ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(۲) \text{ جم } ۱ع + \text{جم } ۲ع + \text{جم } ۳ع + \text{جم } ۴ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(۳) \text{ جب } ۱ع + \text{جب } ۲ع + \text{جب } ۳ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$\frac{۲}{۳} = \text{جہاں } ۱ع \text{ بحر}$$

$$(۴) \text{ جب } ۱ع + \text{جب } ۲ع + \text{جب } ۳ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$\frac{۲}{۳} \neq ۱ع \text{ جہاں}$$

$$(۵) \text{ جب } ۱ع + \text{جب } ۲ع + \text{جب } ۳ع + \dots \dots \dots$$

ن رقوم تک اور لاتناہی تک

$$(۶) ۱ع + \text{ج جمر } ۱ع + \text{ج جمر } ۲ع + \dots \dots \dots + \text{ج (ن-۱) جمر (ن-۱)ع}$$

$$(۷) \text{ ج جبر } ۱ع + \text{ج جبر } ۲ع + \text{ج جبر } ۳ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(۸) ۱-۲ \text{ جم } ۱ع + ۲-۳ \text{ جم } ۲ع + \dots \dots \dots \text{ تا ن رقوم}$$

$$(۹) ۳ \text{ جب } ۱ع + ۵ \text{ جب } ۲ع + ۷ \text{ جب } ۳ع + \dots \dots \dots \text{ تا ن رقوم}$$

$$(۱۰) \text{ اگر } ۱ = \frac{۲}{۳} \text{ تو مشق (۳) اور مشق (۴) کے سلسلوں کی قیمتیں دریافت کرو۔}$$

$$(۱۱) \text{ جب } ۱ع + \text{جب } ۲ع + \dots \dots \dots + \frac{\text{ن (ن-۱)}}{۲} \text{ جب (ن-۱)ع} + \dots \dots \dots \text{ تا (ن+۱) رقوم}$$

جہاں ن کسی مثبت صحیح عدد کو تعبیر کرتا ہے۔

$$(۱۲) \text{ جب } ۱ع + \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۳ع + \frac{۳ \times ۱}{۲ \times ۲} \text{ جب } ۵ع + \dots \dots \dots \text{ تا لاتناہی}$$

$$(۱۳) \text{ جم } ۱ع - \text{جم } ۲ع + \text{جم } ۳ع - \dots \dots \dots + \frac{\text{ن (ن-۱)}}{۲} \text{ جم } ۲ع - \text{جم } ۳ع + \dots \dots \dots$$

تا (ن+۱) رقوم

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

$$(۱۴) \quad \text{ن جب } ۱ + \frac{\text{ن} (۱ + \text{ن})}{۲ \times ۱} + \text{جب } ۲ + \frac{\text{ن} (۱ + \text{ن}) (۲ + \text{ن})}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots + \text{تا لانتا ہی}$$

$$(۱۵) \quad ۱ + \frac{۱}{۲} + \text{جب } ۲ - \frac{۱}{۲ \times ۲} + \text{جب } ۳ + \frac{۳ \times ۱}{۴ \times ۳ \times ۲} + \dots + \text{تا لانتا ہی}$$

$$(۱۶) \quad \text{جب } ۱ + \text{ن جب } ۲ + \frac{\text{ن} (۱ - \text{ن})}{۲} + \text{جب } ۳ + \dots + \text{ن} (۱ + \text{ن}) + \dots + \text{تو نمک}$$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۰۷۔ مشتق - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

$$۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ جب } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جب } ۳}{۳} + \dots + \text{تا لانتا ہی}$$

$$\text{فرض کرو کہ } م = ۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ جب } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جب } ۳}{۳} + \dots + \text{تا لانتا ہی} \quad (۱)$$

$$\text{اور } ج = \frac{\text{ج}^۲ \text{ جب } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ جب } ۳}{۳} + \dots + \text{تا لانتا ہی} \quad (۲)$$

$$\text{اسلئے} \\ \text{م} + \text{خ ج} = ۱ + \frac{\text{ج}^۲ \text{ فو } ۲}{۲} + \frac{\text{ج}^۳ \text{ فو } ۳}{۳} + \dots + \text{تا لانتا ہی}$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{\text{ن}}$$

جہاں ج فو خطہ یعنی ج (جم ط + خ جب ط) کی بجائے 'ما' لکھا گیا ہے

$$\text{م} + \text{خ ج} = \frac{\text{فوا} + \text{فوا}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \text{خ جب ط} - \text{خ ج جب ط} \quad (۳)$$

$$= \frac{1}{4} \text{ وجہ جم ط } [\text{جم (ج جب ط)} + \text{خ جب (ج جب ط)}]$$

$$+ \frac{1}{4} \text{ وجہ جم ط } [\text{جم (ج جب ط)} - \text{خ جب (ج جب ط)}]$$

..... (دفعہ ۶۲)

اسلئے حقیقی حصوں کو باہم برابر کرنے سے

$$م = \frac{1}{4} \text{ جم (ج جب ط)} [\text{وجہ جم ط} + \text{وجہ جم ط}]$$

$$= \text{جم (ج جب ط)} \text{ جمز (ج جم ط)}$$

اور خیالی حصوں کو باہم مساوی کرنے سے

$$\text{ج} = \frac{1}{4} \text{ جب (ج جب ط)} [\text{وجہ جم ط} - \text{وجہ جم ط}]$$

$$= \text{جب (ج جب ط)} \text{ جمیز (ج جم ط)}$$

متبادل ثبوت

مساوات (۳) سے

$$م + \text{خ ج} = \frac{1}{4} \text{ وجہ جم ط} - \text{خ ج جم ط} + \frac{1}{4} \text{ وجہ جم ط} - \text{خ ج جم ط}$$

$$= \text{جم (ج جب ط} - \text{خ ج جم ط)} \dots\dots\dots \text{ (دفعہ ۶۲)}$$

$$= [\text{جم (ج جب ط)} \text{ جم (خ ج جم ط)} + \text{جب (ج جب ط)} \text{ جب (خ ج جم ط)}]$$

$$= [\text{جم (ج جب ط)} \text{ جمز (ج جم ط)} + \text{خ جب (ج جب ط)} \text{ جمیز (ج جم ط)}] \dots\dots\dots \text{ دفعہ ۶۱}$$

اس سے م اور ج کی قیمتیں حسب سابق حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۰۸ - مشتق - ذیل کے دو سلسلوں

$$\text{ج جب م} + \frac{1}{2} \text{ جب م} + \frac{1}{4} \text{ جب م} + \dots\dots\dots \text{ م لاتنا ہی}$$

$$\text{اور ج جم م} + \frac{1}{2} \text{ جم م} + \frac{1}{4} \text{ جم م} + \dots\dots\dots \text{ م لاتنا ہی}$$

کو الگ الگ جمع کرو جبکہ ج تعداد ایک سے بڑا نہ ہو۔

فرض کر دو کہ اوپر کے سلسلے بالترتیب ج اور م کے مادی ہیں تب جب سابق
 م + خر ج = ج (جم + خر جب ع) + $\frac{ج}{۲}$ (جم ۲ ع + خر جب ۲ ع) +
 = ج و خر + $\frac{ج}{۲}$ و خر + $\frac{ج}{۲}$ و خر + (۱)
 = - لوک [۱- ج و خر] دفعہ ۹۰ کی رو سے (۲)

= - لوک [۱- ج جم ع - خر ج جب ع] دفعہ ۶۲

فرض کر دو کہ ۱- ج جم ع = رجم طہ اور - ج جب ع = رجب طہ
 یعنی ر = + م (۱- ج جم ع + ج ۲) رجم طہ = ۱- ج جم ع
 اور ج جب طہ = - ج جب ع

یعنی طہ = مس ۱- ج جب ع [زیر شرط و فقر]

∴ م + خر ج = - لوک { م (۱- ج ۲ جم ع + ج ۲) (جم طہ + خر جب طہ) }

= - لوک { م (۱- ج ۲ جم ع + ج ۲) × و خر }

= - لوک { م (۱- ج ۲ جم ع + ج ۲) - خر طہ }

∴ م = - لوک { م (۱- ج ۲ جم ع + ج ۲) }

= - ۱/۲ لوک (۱- ج ۲ جم ع + ج ۲) (۳)

اور ج = طہ = مس ۱- $\left(\frac{ج جب ع}{۱- ج جم ع}\right)$ (۴)

مستثنیٰ صورتیں

اگر ج = ۱ تو مقدار (۲)

= - لوک [۱- حجم - خر جب عد] = - لوک [۱+ حجم (عد- ۱۱) + خر جب (عد- ۱۱)]
 دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے اس
 صورت کے جبکہ عد = ۱۱ (۲ ن + ۱) ۱۱ کے برابر ہو یعنی سوائے اس صورت
 کے جبکہ عد ۱۱ کا کوئی ضلع ہو۔

اس صورت میں ج = ۰

اور $م = ۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۸} + \dots$
 جو صریحاً ایک متع سلسلہ ہے

اگر ج = ۱، تو مقدار (۲) = - لوک (۱+ حجم + خر جب عد)
 دفعہ ۹۰ کی رو سے یہ رقم ہمیشہ سلسلہ (۱) کے مساوی ہوتی ہے سوائے
 اس صورت کے جبکہ عد ۱۱ (۲ ن + ۱) کے برابر ہو۔
 اس صورت میں ج = ۰

اور $م = ۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۸} + \dots$
 پس مقادیر (۳) اور (۴) دو سلسلوں کے مجموعوں کو تعبیر کرتی ہیں
 سوائے ان صورتوں کے جب

(۱) ج = ۱ اور عد = ۱۱ (۲ ن + ۱)

(۲) ج = ۰ اور عد = ۱۱ (۲ ن + ۱)

(۳) ج کے

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان امثلہ میں جن کی جمع لوکار تھی سلسلہ پر مبنی ہوتی
 اکثر اوقات زاد یہ کی خاص خاص قیمتوں کے لئے کوئی حاصل جمع
 حاصل نہیں ہوتا۔

صورت خاص

اگر ج = جم عہ جہاں عہ، منفرد اور $\frac{11}{4}$ کے درمیان واقع ہے تو

$$ج = جم عہ جب عہ + \frac{1}{4} جم^1 عہ جب ۲ عہ + \frac{1}{4} جم^2 عہ جب ۳ عہ + \\ \text{اس صورت میں}$$

$$ج = س - س^1 \left(\frac{جب عہ جب عہ}{جب^2 عہ} \right) مساوات (۴) سہ پنی$$

$$= س - س^1 (- مم عہ)$$

$$= (- عہ - \frac{11}{4}) (زریقو دم درجہ دفعہ ۲۰)$$

$$= \frac{11}{4} - عہ$$

امثلہ ۱۷

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$۱ - جب عہ + ج جب عہ + (بہ) + \frac{ج^2 عہ}{۲} جب (عہ + ۲ بہ) + تالانتنا ہی$$

$$۲ - جم عہ + ج جم عہ + (عہ + بہ) + \frac{ج^2 عہ}{۲} جم (عہ + ۲ بہ) + تالانتنا ہی$$

$$۳ - ۱ - جم عہ جم بہ + \frac{جم^2 عہ}{۲} جم بہ - \frac{جم عہ}{۳} جم ۳ بہ + تالانتنا ہی$$

$$۴ - جب عہ - جب (عہ + ۲ بہ) + \frac{جب (عہ + ۲ بہ)}{۲} - تالانتنا ہی$$

$$۵ - جم عہ - جم (عہ + ۲ بہ) + \frac{جم (عہ + ۲ بہ)}{۲} - تالانتنا ہی$$

$$۶ - ۱ + جمز عہ + \frac{جمز ۲ عہ}{۲} + \frac{جمز ۳ عہ}{۳} + تالانتنا ہی$$

$$۷- \text{جیزع} + \frac{\text{جیز}^۲ \text{ع}}{۲۱} + \frac{\text{جیز}^۳ \text{ع}}{۳۱} + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۸- ۱ + \text{وجب}^۲ \text{جم} (\text{جب} \text{ع}) + \frac{۱}{۲۱} \text{وجب}^۲ \text{جم}^۲ (\text{جب}^۲ \text{ع}) + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۹- ۱ + \text{وجب}^۲ \text{جم} (\text{جم} \text{ع}) + \frac{۲}{۲۱} \text{وجب}^۲ \text{جم} (\text{جم}^۲ \text{ع}) + \frac{۳}{۳۱} \text{وجب}^۲ \text{جم} (\text{جم}^۳ \text{ع}) + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۰- \frac{۵}{۱} \text{جم} + \frac{۴}{۲۱} \text{جم}^۲ + \frac{۹}{۵۱} \text{جم}^۳ + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

ذیل کے اشلہ میں ج کو مثبت اور ایک سے کم فرض کیا جائے۔ اگر ج ایک کے برابر ہو تو دفعہ ۱۰ کے بموجب زاویہ عد کی بعض قیمتوں کے واسطے متعین صورتیں پیدا ہوتی

$$۱۱- \text{ج جب} \text{ع} - \frac{\text{ج}}{۲} \text{جب}^۲ \text{ع} + \frac{\text{ج}}{۳} \text{جب}^۳ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۲- \text{ج جب} \text{ع} + \frac{۱}{۲} \text{ج جب}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب}^۵ \text{ع} + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۳- \text{ج جم} \text{ع} + \frac{۱}{۲} \text{ج جم}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جم}^۵ \text{ع} + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۴- \text{ج جم} \text{ع} - \frac{۱}{۲} \text{ج جم}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جم}^۵ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۵- \text{ج جب} \text{ع} - \frac{۱}{۲} \text{ج جب}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جب}^۵ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۶- \text{جم} \text{ع} - \frac{۱}{۲} \text{جم}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{جم}^۵ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۷- \text{ج جم} \text{ع} - \frac{۱}{۲} \text{ج جم}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۵} \text{ج جم}^۵ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۸- \text{جب} \text{ع جب} \text{ب} + \frac{۱}{۲} \text{جب}^۲ \text{ع جب}^۲ \text{ب} + \frac{۱}{۲} \text{جب}^۳ \text{ع جب}^۳ \text{ب} + \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۱۹- \text{ج جب} \text{ع} - \frac{۱}{۲} \text{ج جب}^۳ \text{ع} + \frac{۱}{۲} \text{ج جب}^۳ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

$$۲۰- \text{جیزع} - \frac{۱}{۲} \text{جیز}^۲ \text{ع} + \frac{۱}{۲} \text{جیز}^۳ \text{ع} - \dots \dots \dots \text{تالائناہی}$$

۲۱- نو^۲ جم ۲- $\frac{1}{3}$ نو^۲ جم ۳ پر $\frac{1}{5}$ نو^۲ جم ۵ پر - ... تالا تالابی

۲۲- جم $\frac{7}{3}$ + $\frac{1}{3}$ جم $\frac{7}{3}$ + $\frac{1}{5}$ جم $\frac{7}{3}$ + $\frac{1}{2}$ جم $\frac{7}{3}$ + ... تالا تالابی

۲۳- اگر ط- مس^۲ سے جب ۲ ط- $\frac{1}{4}$ مس^۲ سے جب ۴ ط

+ $\frac{1}{4}$ مس^۲ سے جب ۶ ط- ... تالا تالابی

تو ثابت کر دو کہ مس = مس ط جم سے

۲۴- اگر ط اور ذ، مثبت حادے زاوئے ہوں تو ثابت کر دو کہ سلسلہ

جب ط جم ذ + $\frac{1}{3}$ جب ۳ ط جم ۳ ذ + $\frac{1}{5}$ جب ۵ ط جم ۵ ذ + ... تالا تالابی
کا حاصل جمع $\frac{7}{3}$ ہو گا۔ اگر ط < ذ، اور صفر ہو گا۔ اگر ط > ذ،
ثابت کر دو کہ

۲۵- مسزلا + $\frac{1}{3}$ مسزلا + $\frac{1}{5}$ مسزلا + ... تالا تالابی

= مس لا - $\frac{1}{3}$ مس لا + $\frac{1}{5}$ مس لا - ...

جہاں لا - $\frac{7}{3}$ اور $\frac{7}{5}$ کے درمیان واقع ہے

۲۶- ۲ جب ۲ ط + $\frac{1}{4}$ ۴ جب ۴ ط + $\frac{1}{5}$ ۸ جب ۸ ط + ...

= { مس ط + $\frac{1}{3}$ مس ط + $\frac{1}{5}$ مس ط + ... }

جہاں ط - $\frac{7}{3}$ اور $\frac{7}{5}$ کے درمیان واقع ہے۔

۲۷- جب ط + $\frac{1}{3}$ جب ۳ ط + $\frac{1}{5}$ جب ۵ ط + ...

X = ۲ (جب ط - $\frac{1}{3}$ جب ۳ ط + $\frac{1}{5}$ جب ۵ ط - ...)

جہاں ط $\neq \frac{7}{3} (1 + 2n)$

۱۰۹- اب ہم چند ایسے سلسلوں کی مثالیں درج کرتے ہیں جو نہ تو

مندرجہ بالا البواب میں سے کسی کے تحت میں آتے ہیں اور نہ باب ۱۹
 حصہ اول کے تحت میں۔ ایسی صورتوں میں! بعوم یہ طریقہ کار اگر ہو گا کہ
 ہر ایک رقم کو توڑ کر اسکو دو اور رقوم کے فرق کی شکل میں لکھ لیا جائے۔
 اس عمل کے لئے بعض اوقات بڑی فراست کی ضرورت ہوتی ہے! لیکن
 اگر جواب معلوم ہو تو اس کی مدد سے جمع کرنے کا طریقہ نسبتاً آسانی سے
 معلوم ہو سکتا ہے! کیونکہ جواب میں ن کی بجائے ایک لکھنے سے ظاہر ہوتا
 ہے کہ پہلی رقم کو کس شکل میں لکھنا چاہیئے۔

مشق ۱۔ سلسلہ

$$\text{جب } ۲ \text{ طے} + ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} + ۴ \text{ جب } ۳ \text{ طے} + \dots$$

کو ن رقوم تک جمع کرو۔

چونکہ ہمیشہ جب ۳ ذ = ۳ جب ذ - ۳ جب ذ

$$\therefore \text{جب } ۳ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} \times (۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے})$$

$$۳ \times \text{جب } ۳ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} \times (۳ \times ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \times ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے})$$

$$۳ \times \text{جب } ۳ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} [۳ \times ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ \times ۳ \text{ جب } ۳ \text{ طے}]$$

$$۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے} = \frac{۱}{۳} [۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے}]$$

پس جمع کرنے سے مطلوبہ حاصل جمع

$$= \frac{۱}{۳} [۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے}]$$

نیز لانتا ہی تک حاصل جمع

$$= \frac{۱}{۳} [۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے} - ۳ (ن-۱) \text{ جب } ۳ \text{ طے}]$$

مشق ۲ - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو

مس ۱۰ + مس ۲۰ + مس ۳۰ + + مس ۱۰۰ + مس ۱۰۰۰

ظاہر ہے کہ

$$\text{مس } ۱۰ = \text{مس } ۲۰ - \text{مس } ۱۰$$

$$\text{مس } ۲۰ = \text{مس } ۳۰ - \text{مس } ۲۰$$

$$\text{مس } ۳۰ = \text{مس } ۴۰ - \text{مس } ۳۰$$

$$\text{مس } ۱۰۰ = \text{مس } ۱۰۰۰ - \text{مس } ۱۰۰$$

ان قطاروں کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۱۰۰ سے ضرب دینے

اور جمع کرنے سے

مس ۱۰ + مس ۲۰ + مس ۳۰ + + مس ۱۰۰ + مس ۱۰۰۰

$$= \text{مس } ۲۰ - \text{مس } ۱۰$$

کیونکہ باقی سب رقوم کٹ جاتی ہیں۔

ہذا حاصل مطلوب = مس ۲۰ - مس ۱۰

مشق ۳ - ذیل کے سلسلہ کو جمع کرو۔

مس ۱۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۱۰) + مس ۲۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۲۰) +

مس ۳۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۳۰) +

فرض کرو کہ ر دین رقم = مس ۱۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۱۰) + مس ۲۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۲۰) +

مس ۳۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۳۰) +

مس ۴۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۴۰) +

مس ۵۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۵۰) +

مس ۶۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۶۰) +

مس ۷۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۷۰) +

مس ۸۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۸۰) +

مس ۹۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۹۰) +

مس ۱۰۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۱۰۰)

مس ۱۰ + مس ۲۰ + مس ۳۰ + + مس ۱۰۰ + مس ۱۰۰۰

مس ۱۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۱۰) + مس ۲۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۲۰) + مس ۳۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۳۰) + مس ۴۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۴۰) + مس ۵۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۵۰) + مس ۶۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۶۰) + مس ۷۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۷۰) + مس ۸۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۸۰) + مس ۹۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۹۰) + مس ۱۰۰ (۱ + ۲ + ۳ + + ۱۰۰)

= مس [عہ + رہ] - مس [عہ + (ر - ۱) بہ] دفعہ ۸ حصہ اول

پس رکوبالترتیب '۱'، '۲' ن قیمتیں دینے سے

(۱ + ی) مس بہ = مس (عہ + بہ) - مس عہ

(۱ + ی) مس بہ = مس (عہ + ۲ بہ) - مس (عہ + بہ)

.....
(۱ + ی) مس بہ = مس (عہ + ن بہ) - مس {عہ + (ن - ۱) بہ}

جمع کرنے سے

(ن + ج) مس بہ = مس (عہ + ن بہ) - مس عہ

پس ج = $\frac{\text{مس (عہ + ن بہ) - مس عہ}}{\text{مس بہ}}$

امثلہ ۱۸

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو -

۱ - رقم طہ + رقم طہ + رقم طہ + تان رقم

۲ - رقم طہ رقم طہ + رقم طہ + رقم طہ + تان رقم

۳ - قط طہ قط طہ + قط طہ قط طہ + قط طہ قط طہ + تان رقم

۴ - قط طہ قط (طہ + ذہ) + قط (طہ + ذہ) قط (طہ + ذہ) + قط (طہ + ذہ) قط (طہ + ذہ) + تان رقم

+ تان رقم

۵ - $\frac{1}{\text{جم عہ + جم ۳ عہ}} + \frac{1}{\text{جم عہ + جم ۵ عہ}} + \frac{1}{\text{جم عہ + جم ۷ عہ}} + \dots$ تان رقم

۶ - مس طہ + $\frac{1}{۴}$ مس طہ + $\frac{1}{۴}$ مس طہ + $\frac{1}{۴}$ مس طہ + تان لائنا ہی

$$۷- \text{سنه} + \frac{1}{4} \text{سنه} + \frac{1}{4} \text{سنه} + \frac{1}{4} \text{سنه} + \frac{1}{4} \text{سنه} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۸- \text{مس} \text{قط} ۲ \text{ط} + \text{مس} ۲ \text{قط} ۴ \text{ط} + \text{مس} ۴ \text{قط} ۸ \text{ط} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۹- \text{مس} \text{ط} \text{قط} ۲ \text{ط} + \text{مس} \frac{1}{4} \text{قط} ۲ \text{ط} + \text{مس} \frac{1}{4} \text{قط} ۲ \text{ط} + \dots \text{ن رقوم}$$

تک اور نیز لائنا ہی تک

$$۱۰- ۲ \text{جم} \text{ط} + ۲ \text{جم} \text{ط} ۲ \text{ط} + ۲ \text{جم} \text{ط} ۲ \text{جم} \text{ط} ۲ \text{ط} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۱- \text{جب} ۲ \text{جم} \text{ط} - \frac{1}{4} \text{جب} ۴ \text{جم} \text{ط} ۲ \text{ط} + \frac{1}{4} \text{جب} ۸ \text{جم} \text{ط} ۴ \text{ط} - \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۲- \text{جب} ۲ \text{جم} \text{ط} + \frac{1}{4} \text{جب} ۴ \text{جم} \text{ط} ۲ \text{ط} + \frac{1}{4} \text{جب} ۸ \text{جم} \text{ط} ۴ \text{ط} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۳- \frac{\text{جب} \text{ط}}{\text{جم} + \text{جم} \text{ط} ۲} + \frac{\text{جب} ۲ \text{ط}}{\text{جم} \text{ط} + \text{جم} ۴ \text{ط}} + \frac{\text{جب} ۴ \text{ط}}{\text{جم} ۲ \text{ط} + \text{جم} ۴ \text{ط}} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۴- \text{مس} \text{ع} \text{مس} ۲ \text{ع} + \frac{1}{4} \text{مس} ۴ \text{ع} \text{مس} ۲ \text{ع} + \frac{1}{4} \text{مس} ۸ \text{ع} \text{مس} ۴ \text{ع} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۵- \text{جم} ۲ \text{ط} - \frac{1}{4} \text{جم} ۴ \text{ط} ۲ \text{ط} + \frac{1}{4} \text{جم} ۸ \text{ط} ۴ \text{ط} - \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۶- \text{جب} ۳ \text{ط} + ۳ \text{جب} ۳ \text{ط} + ۳ \text{جب} ۳ \text{ط} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۷- \frac{1}{\text{م} \text{ط} - \text{م} \text{مس} \text{ط}} + \frac{1}{\text{م} \text{ط} - \text{م} \text{مس} \text{ط}} + \frac{1}{\text{م} \text{ط} - \text{م} \text{مس} \text{ط}} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۸- \frac{\text{جم} \text{ط} - \text{جم} ۳ \text{ط}}{\text{جب} ۳ \text{ط}} + \frac{\text{جم} ۳ \text{ط} - \text{جم} ۳ \text{ط}}{\text{جب} ۳ \text{ط}} + \frac{\text{جم} ۳ \text{ط} - \text{جم} ۳ \text{ط}}{\text{جب} ۳ \text{ط}} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۱۹- \text{سن} \frac{۴}{۴ \times ۳ + ۱} + \text{سن} \frac{۶}{۹ \times ۸ + ۱} + \text{سن} \frac{۸}{۱۶ \times ۱۵ + ۱} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$۲۰- \text{سن} \frac{1}{۱} + \text{سن} \frac{1}{۳} + \text{سن} \frac{1}{۵} + \dots \text{تان رقوم}$$

$$21 - \text{مس}^1 \frac{1}{3} + \text{مس}^1 \frac{2}{9} + \dots + \text{مس}^1 \frac{1-5}{1-5} \frac{2}{1+1} \dots \text{تا لانهایی}$$

$$22 - \text{ج} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{ج} - \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \text{ج} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dots$$

$$+ \text{جب } \frac{\overline{\text{مان}} - \text{مان} - ۱}{\text{مان}(ن + ۱)} + \dots \dots \dots \text{تا انتہائی}$$

$$= 2 - 2 \times 1 \text{ حجم ط} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \text{ حجم ط} - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \text{ حجم ط} \dots$$

$$= 2 - [2 \text{ حجم ط} + \frac{1}{2} \times 2 \text{ حجم ط} + \frac{1}{3} \times 2 \text{ حجم ط} + \dots]$$

دفعہ ۹۰ کی رو سے لوک (۱-۱ و خط) کی مندرجہ بالا تفصیل بالاسم
اس صورت میں درست اور جائز ہوگی اگر ۱ و خط کا مقیاس ایک سے
کم ہو اور چونکہ ۱ و خط = { حجم (۲ + ط) + سطح (۲ + ط) }
اس لئے اس کا مقیاس ۱ ہے۔

اس لئے بالاسم مندرجہ بالا تفصیل اس صورت میں درست ہوگی جب
۱-۱ سے کم ہو۔

اگر ۱-۱ کے مساوی ہو تو بھی مندرجہ بالا تفصیل درست رہے گی
بشرطیکہ ط، ۲ کے کسی جنس صنف کے مساوی نہ ہو
نیز اگر ۱-۱ کے برابر ہو اور ط، ۲ کے کسی طاق صنف کے مساوی
نہ ہو تو بھی تفصیل بالا درست رہیگی۔

۱۱۱- مشق -

$$2-1$$

$$2-1 \text{ حجم ط} + 2-1$$

کو ۱ کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

ظاہر ہے کہ

$$\frac{2-1}{2-1 \text{ حجم ط} + 2-1} + \dots = \frac{2-1}{2-1 \text{ حجم ط} + 2-1}$$

$$2-1 \text{ (وخط + وخط)}$$

$$= 1-1 + \frac{2-1 \text{ (وخط + وخط)}}{2-1}$$

$$= ۲ \text{ جب } ط + ۲ \text{ جب } ۲ ط + ۲ \text{ جب } ۳ ط + \text{ تالانتا ہی}$$

حسب سابق یہ تفصیل بھی اسی صورت میں جائز ہوگی جب $۱ > ۱$

$$۱۱۲ - \text{مشق} - \text{اگر جب } لا = ن \text{ جب } (ع + لا) \text{ تو لا کو } ن \text{ کی صعودی}$$

قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ جہاں $ن$ ایک سے کم ہے۔

$$\text{چونکہ جب } لا = ن \text{ جب } (ع + لا) = ن \{ \text{جب } ع + جم + لا = ن \text{ جب } لا \}$$

$$\therefore \text{مس } لا = \frac{ن \text{ جب } ع}{۱ - ن \text{ جب } ع}$$

$$\therefore \frac{\text{و } لا - \text{و } ع}{\text{و } لا + \text{و } ع} = \frac{ن \text{ جب } ع}{۱ - ن \text{ جب } ع}$$

$$\therefore \frac{\text{و } لا}{\text{و } لا + \text{و } ع} = \frac{۱ - ن \text{ جب } ع + ن \text{ جب } ع}{۱ - ن \text{ جب } ع} = \frac{۱ - ن \text{ و } ع}{۱ - ن \text{ و } ع}$$

$$\therefore ۲ \text{ و } لا = \text{لوک } (۱ - ن \text{ و } ع) - \text{لوک } (۱ - ن \text{ و } ع)$$

$$= - ن \text{ و } ع - \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع - \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع - ۳ \text{ و } ع - =$$

$$+ ن \text{ و } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع + ۳ \text{ و } ع + =$$

$$= ن \text{ (و } ع - \text{و } ع) + \frac{۱}{۲} ن \text{ (و } ع - \text{و } ع) - ۲ \text{ و } ع$$

$$+ \frac{۱}{۲} ن \text{ (و } ع - \text{و } ع) - ۳ \text{ و } ع - \text{ تالانتا ہی}$$

$$= - ن \text{ و } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع + ۲ \text{ و } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ و } ع + ۳ \text{ و } ع + =$$

$$= لا = ن \text{ جب } ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ جب } ۲ ع + \frac{۱}{۲} ن \text{ جب } ۳ ع + (۱)$$

اس مساوات میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ لا = ۱ اور ۱ کے

درمیان واقع ہے۔ اگر ایسا نہ ہو تو ہم کو چاہئے کہ ۲ خ لا کی بجائے
 ۲ک خ ۲ + ۲ خ لا لکھیں، تب مساوات (۱) کے دائیں جانب
 کارکن لا + ک ۲ ہو جائیگا۔ بعد ازیں ہم ک، کے لئے اسی قیمت
 تجویز کر سکتے ہیں جس سے لا + ک ۲ = ۲ - ۲ اور ۲ کے درمیان
 واقع ہو۔

حسب سابق یہ تفصیلات اسی صورت میں درست ہونگی جبکہ
 (ن) ایک سے کم ہو۔

۱۱۳۔ مشق۔ دو لا جمب لا کو لا کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ
 میں پھیلاؤ۔

ظاہر ہے کہ

$$\text{دو لا جمب لا} = \frac{\text{دو لا دو ب خ} + \text{دو ب خ}}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ دو } (۱ + \text{خ ب}) + \frac{۱}{۲} \text{ دو } (۱ - \text{خ ب})$$

$$= \frac{۱}{۲} [۱ + (۱ + \text{خ ب}) لا + \frac{(۱ + \text{خ ب}) لا^۲}{۲} + \frac{(۱ + \text{خ ب}) لا^۳}{۳} + \dots]$$

$$+ \frac{۱}{۲} [۱ + (۱ - \text{خ ب}) لا + \frac{(۱ - \text{خ ب}) لا^۲}{۲} + \frac{(۱ - \text{خ ب}) لا^۳}{۳} + \dots]$$

$$\text{اس میں لا کا سر} = \frac{(۱ + \text{خ ب})^ن + (۱ - \text{خ ب})^ن}{۲}$$

اگر ۱ + خ ب = ر (جم عم + خ جب عم)

یعنی ر = ۱ + ۱ + ۱ ب اور مس عم = ۲ (زیر شہ الط دفعہ ۲۰)

تب لا کاسر = { (جم عم + خ جب عم) } + { (جم عم - خ جب عم) }^ن

۲ ن
مسئلہ ڈی مائیسرے کی روستے = ر ن جم ن عم
لہذا

$$\text{نوا لا جم ب لا} = ۱ + \text{ر جم عم} \times \text{لا} + \frac{\text{ر جم ۲ عم}}{۲} \text{لا} + \frac{\text{ر جم ۳ عم}}{۳} \text{لا} + \dots + \frac{\text{ر جم ۴ عم}}{۴} \text{لا} + \dots$$

$$\text{جہاں } ر = + \text{نوا} + \text{ب}^۲ \text{ اور مس عم} = \frac{۱}{۲}$$

یہ تفصیل 'ا' ب' اور لا کی تمام قیمتوں کے واسطے درست ہے... (صفحہ ۵۷)

امثلہ ۱۹

رقوم ذیل کو لا تناری سلسلوں میں پھیلاؤ

$$(۱) \frac{۱ + ۱ \text{ جم ط}}{۱ + ۲ \text{ جم ط} + ۱} \quad (۲) \frac{\text{جم ط} - ۱ \text{ جم (ط-ف)}}{۱ - ۲ \text{ جم ف} + ۱}$$

$$(۳) \frac{\text{جب ط} - ۱ \text{ جب (ط-ف)}}{۱ - ۲ \text{ جم ف} + ۱} \quad (۴) \text{نوا جم ن جم (ط+ا جب ف)}$$

$$(۵) \text{نوا جب ب ط}$$

ثابت کرو کہ

$$(۶) \text{لوک} = \frac{۱}{۱ + \text{جم ۱ ط} + \text{ب}^۲ \text{ جب ط}}$$

$$= \left[\text{ج جب ط} - \frac{۱}{۲} \text{ ج جب ۲ ط} + \frac{۱}{۳} \text{ ج جب ۳ ط} - \dots \right] \dots \text{جہاں ج} = \frac{۱ - \text{ب}}{۱ + \text{ب}}$$

باب

اجزاء سے ضربی میں تکمیل کرنا اور حب طہ اور جم طہ کے لئے

راستی حاصل ضرب

۱۱۴۔ ہم الجبر میں یہ معلوم کر چکے ہیں کہ اگر ف سے لا کا کوئی تقاضا عمل مراد ہو اور اگر یہ بلا لا کی بجائے عہ رکھنے سے صفر ہو جائے تو لا۔ عہ ف کا ایک جزو ضروری ہو تا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ کسی ذات کے اجزائے فیزیکی معلوم کر کے اس کے لیے جبر، مساوات، فن - کو حل کرنا چاہیے۔

نیز ہمیں معلوم ہے کہ اگر $f = 0$ میں درجہ کی مساوات ہوتی ہے
اس مساوات کے n حل ہونگے۔ اور اگر n فیکٹریل ہو مساوات مذکورہ
کو حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ نہ ہوں تو جواب
کے اجزاء $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ نہ ہونگے اور

ان کے علاوہ اور کوئی جزو ضروری ایسا نہ ہو گا جس میں لا شامل ہو
دفعات ما بعد میں اجزاء سے ضروری معلوم کرنے کے لئے ہم یہی طریقہ
اختیار کریں گے۔

۱۱۵۔ جملہ لائنوں پر ۲۰ لائن حجم نہ ۱ +

کو اس کے اجزائے صغریٰ میں تحلیل کرو۔

ہیں پہلے مساوات

$$(لا ۲ - ۲ لا ۱) جم ۱ ط ۱ = ۰$$

کو حل کرنا چاہیے

مساوات بالا اس طرح لکھی جاسکتی ہے (لا ۲ - ۲ لا ۱) جم ۱ ط ۱ = ۰ - جب ۲

یعنی (لا ۲ - ۲ لا ۱) جم ۱ ط ۱ = ۰

اور اس لئے لا ۲ = [جم ۱ ط ۱ + ۲ لا ۱] جب ۱ ط ۱

دفعہ ۲۲ کی رو سے اس پر کی تینیں ذیل کی ۱ ط ۱ مقدار دیں۔

$$جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱ = (جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱)$$

$$جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱ = (جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱)$$

$$جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱ = \frac{۲(۱ - ۱) + ۲(۱ - ۱)}{۱}$$

پہلے زوج سے ذیل کے دو اجزائے ضربی حاصل ہو گئے ہیں۔

لا ۲ - ۲ لا ۱ جم ۱ ط ۱ اور لا ۲ - ۲ لا ۱ جم ۱ ط ۱

یا اگر ان دونوں کو ضرب دیکر ایک جزو ضربی بنالیا جائے گا تو گویا اول

زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$(لا ۲ - ۲ لا ۱) جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱$$

یعنی (لا ۲ - ۲ لا ۱) جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱

اسی طرح سے متذکرہ بالا مقدار کے دوسرے تیسرے

ازواج سے بالترتیب ذیل کے اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں۔

$$لا ۲ - ۲ لا ۱ جم ۱ ط ۱ + ۲ جب ۱ ط ۱$$

$$لا^۲ - ۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{۲۲}{ن}) + ۱$$

$$اور لا^۲ - ۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{۲۲ - ۲۰}{ن}) + ۱$$

نیز ان اجزاء ضربی کو ضرب دینے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ لا^{۲۰} کا سر ایک ہے اور اصلی جملہ میں بھی لا^{۲۰} کا سر ایک ہی ہے۔ لہذا جملہ مذکور کو ان اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کے مساوی کرنے میں مؤخر الذکر کے ساتھ کسی عددی جزو ضربی کے ثبت کرنے کی ضرورت نہیں۔

پس

$$لا^۲۰ ۲ لا^۲ جم ن طہ ۱ +$$

$$= (لا^۲۰ ۲ لا^۲ جم طہ ۱ +) \{ لا^۲ - ۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{۲۲}{ن}) + ۱ \} \{ لا^۲ - ۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{۲۲}{ن}) + ۱ \} \dots \{ ۱ + (لا^۲ - ۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{۲۲ - ۲۰}{ن}) + ۱) \}$$

لا^{۲۰} پر تقسیم کرنے سے

$$لا^۲۰ + \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم ن طہ = \{ لا^۲ + \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم طہ \} \{ لا^۲ - \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم (طہ + \frac{۲۲}{ن}) \} \dots \{ لا^۲ + \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم (طہ + \frac{۲۲ - ۲۰}{ن}) \} \dots (۲)$$

رابط (۲) کو بطریقہ ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$لا^۲۰ + \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم ن طہ = II \cdot \frac{۱ - ۲۰}{۲۰} \{ لا^۲ + \frac{۱}{۲۰} - ۲ جم (طہ + \frac{۲۲}{ن}) \}$$

جہاں علامت II سے مراد ان سب جملوں کا حاصل ضرب ہے جو اس کے بائیں

جانب کے جملہ میں ر کو بالترتیب صفر سے لیکر ن-۱ تک کے کل صحیح اعداد کے برابر رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم ن طہ + لا^۲ ن$$

$$= \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم طہ + لا^۲ \} \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{ن-۲}{ن}) + لا^۲ \} \\ \dots \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{ن-۲}{ن}) + لا^۲ \}$$

$$\dots \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (طہ + \frac{ن-۲}{ن}) + لا^۲ \} \dots (۳)$$

۱۱۶- دفعہ قبل کا مسئلہ مستقر سے بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ پہلے ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ

$$لا^۲ + \frac{۱}{ن} - ۲ جم ن ع$$

$$لا + \frac{۱}{ن} - ۲ جم ع پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔$$

اگر لا^۲ + $\frac{۱}{ن}$ - ۲ جم ن ع کو ف (ن) سے تعبیر کیا جائے

اور لا + $\frac{۱}{ن}$ - ۲ جم ع کو ل سے، تو گویا ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ ف (ن) ،

ل پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

مان لو کہ یہ مسئلہ ف (ن-۱) اور ف (ن-۲) کے لئے درست ہے۔

یعنی ف (ن-۱) اور ف (ن-۲) دونوں ل پر پورے تقسیم ہو جاتے ہیں۔

$$\{ لا + \frac{۱}{ن} \} ف (ن-۱) = (لا + \frac{۱}{ن}) \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \}$$

$$= (لا + \frac{۱}{ن}) \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \} + (لا + \frac{۱}{ن}) \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \}$$

$$= \{ لا^۲ + \frac{۱}{ن} - ۲ جم ن ع \}$$

$$+ \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \} - \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \} + \{ لا^۲-۲ لا^۲ لا^۲ جم (ن-۱) + ع \}$$

کیونکہ ۲ جم ن ع + ۲ جم (ن-۱) ع = ۲ جم ع جم (ن-۱) ع

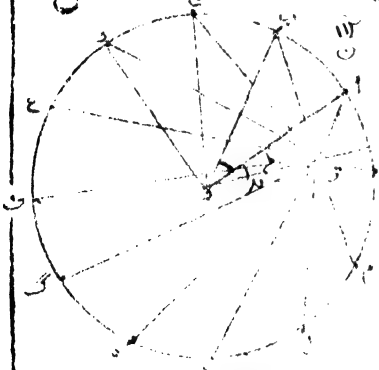
$$لا + \frac{1}{2} = ۲ - جم (عد + \frac{72}{360})$$

$$لا + \frac{1}{2} = ۲ - جم (رد + \frac{72}{360})$$

پر بھی پورا تقییر ہو سکتی ہے۔ اس سے وہ دائرہ کی مساوات (۲) آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے۔

۱۱۷۔ دائرہ کے متعلق ٹرمی مائیکس کے مسئلہ
دفعہ ۱۱۷ کی مساوات ۱۱۷۔ کو چند سی سی پیٹھ سے بنا سکتے ہیں۔
فرض کرو کہ ایک دائرہ کے اندر جس کام کو بے اور نصف قطر ہے
ان اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ا ب ج د بنایا گیا ہے

$$پس \quad \Delta اوب = \Delta بوج = \Delta جود = \dots = \frac{72}{360}$$



فرض کر دو کہ دائرہ کے اندر یا باہر
ایک نقطہ ق ایسا ہے کہ
وقی = لا اور حقی و ا = لا
تبعاً حقی و ب = طہ = حجج
حقی و ج = طہ = حجج

اور بنا پر قی و ا = وقی + و ا = وقی + و ا جم قی و ا

$$= لا - ۲ + لا جم طہ + و ا$$

$$قی سب = وقی + و ب - ۲ وقی + و ب جم قی و ب$$

$$= لا - ۲ + لا جم (طہ + \frac{72}{360}) + و ا$$

$$قی ج = لا - ۲ + جم (طہ + \frac{72}{360}) + و ا$$

لہذا ق^۱ × ق^۲ ب × ق^۳ ج × ن اجزائے ضربی تک

$$= \{ \text{لا۔ ۲ لاجم طہ} + ر \} \{ \text{لا۔ ۲ لاجم (طہ + \frac{\pi}{2})} + ر \}$$

{ لا۔ ۲ لاجم (طہ + \frac{\pi}{2}) + ر } ن اجزائے ضربی تک

$$= \text{لا۔ ۲ لاجم (طہ + ر)}$$

۱۱۸۔ دائرہ کے متعلق کوئی کا مسئلہ

دفعہ ماقبل میں فرض کرو کہ نقطہ ق، دائرہ پر واقع ہے۔

یعنی فرض کرو کہ نقطہ ق، اُن خطوط میں سے جو دائرہ کے مرکز و کو کثیر الاضلاع کے رؤسوں کے ساتھ ملاتے ہیں، کسی ایک پر واقع ہے۔

اس صورت میں طہ = ۰ اور

ق^۱ × ق^۲ ب × ق^۳ ج × ن اجزائے ضربی تک

$$= \text{لا۔ ۲ لاجم (ر)}$$

$$= ۲ (ر)$$

$$= ق^۱ × ق^۲ ب × ق^۳ ج$$

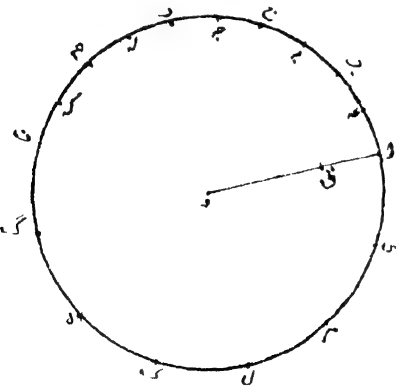
..... ن اجزائے ضربی تک

$$= \text{لا۔ ۲ لاجم (ر یا ر۔ لا۔ ۲ لاجم (ر))}$$

پہلی قیمت اس صورت میں

درست ہوگی جب ق دائرہ

کے باہر وہ ممدودہ پر واقع ہو یعنی جب لا کے ر، اور دوسری قیمت اس صورت میں درست ہوگی، جبکہ نقطہ ق دائرہ کے اندر واقع ہو۔



لہذا ثابت کرو کہ

ق ۱ × ق ۲ ب × ق ۳ ج × ق ۴ د ن اجزائے ضربی تک علامہ ر

نیز فرض کرو کہ قوسوں اب، ب، ج، د کے نقاط تصنیف

بالترتیب عہ، ہ، جہ، لہ ہیں، یعنی اے ب ہ ج جہ ن
اصلاص کا ایک منظم کثیر الاضلاع ہے جو دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے۔
مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ

ق ۱ × ق ۲ ع × ق ۳ ب × ق ۴ ہ × ق ۵ ج × ق ۶ د ۲ ن اجزائے
ضربی تک = (۲ ن - ۲ ن) (۲)

(۱) کو (۲) پر تقسیم کرنے سے

ق ۱ ع × ق ۲ ہ × ق ۳ ج ن اجزائے ضربی تک = لان + ر (۳)
اس دفعہ کی مساوات (۳) دفعہ ۱۱ کی مساوات (۳) میں ط = $\frac{ق}{۲}$ رکھنے
سے براہ راست حاصل ہو سکتی ہے۔ یعنی

(لا ۲ - ۲ لاجم $\frac{ق}{۲}$ + ر) (لا ۲ - ۲ لاجم $\frac{ق}{۲}$ + ر) (لا ۲ - ۲ لاجم $\frac{ق}{۲}$ + ر)
ن اجزائے ضربی تک = لا ۲ ن - ۲ ن لاجم $\frac{ق}{۲}$ + ر
= لا ۲ ن + ۲ ن لاجم $\frac{ق}{۲}$ + ر = (لان + ر) ۲

یعنی ق ۱ ع × ق ۲ ہ × ن اجزائے ضربی تک = (لان + ر) ۲
دفعہ ۱۱ کی مساوات (۳) یہی ہے۔

۱۱۹۔ لان۔ ۱ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہیں مساوات لان - ۱ =

کو حل کرنا چاہیے۔

مساوات مذکورہ سے لاٹا = جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲ جہاں ر سے کوئی صحیح عدد مراد ہے۔

پس لاٹا = [جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲] $\frac{1}{1000000}$ (۱)

صورت اول۔ فرض کر دو کہ 'ن' حقت ہے
بوجب دفعہ ۱۲ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہیں۔

$$\text{جم} = \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} \pm \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100}$$

$$\text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} \pm \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} \pm \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} \pm \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100}$$

$$\text{لیکن } \text{جم} = 0 \pm \text{خ جب} = 1$$

$$\text{اور } \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} = 1$$

لہذا اس صورت میں مساوات (۱) کی اصلیں ذیل کی ن مقداریں ہیں

$$\pm 1 = \text{جم} \frac{22}{100} = \text{خ جب} \frac{22}{100}, \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100}$$

$$\text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100} \pm \text{جم} \frac{22}{100} \pm \text{خ جب} \frac{22}{100}$$

پہلے زوج کے متعلق اجزاء ضربی لاٹا اور لاٹا ۱ میں جو دونوں

مکرر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی لاٹا کے مساوی ہیں۔

دوسرے زوج کے متعلق اجزاء ضربی لاٹا جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲

اور لاٹا جم ۲۲ ر ۲ ± خ جب ۲۲ ر ۲ میں یعنی اس زوج سے متعلق

جزو ضربی درجہ دوم لا-۲ لا-۱ جم $\frac{\pi^2}{n} + 1$ ہے۔
اس طرح ہمیں درجہ دوم کے اجزائے ضربی کے $\frac{\pi}{n}$ زوج حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ان سب کو ضرب دیا جائے تو لا-۱ کا سر ایک ہوگا، اسلئے ہمیں اس حاصل ضرب کے ساتھ کوئی عددی تھرا لگانے کی ضرورت نہیں۔
لہذا بالآخر ثابت ہوا کہ اگر n جفت ہو تو

$$\text{لا-۱} = (1 - \text{لا-۲})(\text{لا-۲} - \text{لا-۱} + \text{جم} \frac{\pi^2}{n})(\text{لا-۲} - \text{لا-۱} + \text{جم} \frac{\pi^2}{n} + 1) \dots \dots \dots (2)$$

صورت دوم۔ فرض کر دو کہ n طاق ہے۔
تب حسب دفعہ ۲۴ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} & , \quad \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} \\ \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} & , \quad \dots \dots \dots \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} \\ \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} & , \quad \dots \dots \dots \text{جم} \frac{\pi^2}{n} \pm \text{خ جب} \frac{\pi^2}{n} \end{aligned}$$

پہلے زوج سے صرف ایک ہی قیمت ۱ حاصل ہوتی ہے
حسب سابق باقی زوجوں کو لینے سے جب n طاق ہو تو

$$\text{لا-۱} = (1 - \text{لا-۲})(\text{لا-۲} - \text{لا-۱} + \text{جم} \frac{\pi^2}{n})(\text{لا-۲} - \text{لا-۱} + \text{جم} \frac{\pi^2}{n} + 1) \dots \dots \dots (3)$$

اختصاراً اگر n جفت ہو تو

$$\text{لاٹ ۱} = (1 - \frac{1}{2}) \text{II} (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (2 - \frac{1}{2}) \text{لاجم} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لاٹ ۱} = (1 - \frac{1}{2}) \text{II} (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (2 - \frac{1}{2}) \text{لاجم} \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2})$$

یہ ضوابط دفعہ ۱۱۵ کے اساسی ضابطہ میں ن طہ کی بجائے ۲۲ لکھنے سے بھی آسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۰۔ لاٹ ۱ کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

پہلے ہیں مساوات لاٹ ۱ = ۰ کو حل کرنا چاہیے۔

$$\text{لاٹ ۱} = ۱ - \text{جم} (۲ + ۲۲) \pm \text{خر جب} (۲ + ۲۲)$$

جہاں کوئی صحیح عدد ہے۔

یعنی لاٹ = {جم (۲ + ۲۲) \pm \text{خر جب} (۲ + ۲۲)} \frac{1}{2}

$$= \text{جم} \frac{۲ + ۲۲}{۲} \pm \text{خر جب} \frac{۲ + ۲۲}{۲} \dots \dots (۱)$$

صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے

بوجب دفعہ ۲۲ جملہ (۱) کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی :-

$$\text{جم} \frac{۲}{۲} \pm \text{خر جب} \frac{۲}{۲} , \text{جم} \frac{۲۳}{۲} \pm \text{خر جب} \frac{۲۳}{۲}$$

$$\text{جم} \frac{۲۵}{۲} \pm \text{خر جب} \frac{۲۵}{۲} \dots \dots \text{جم} \frac{۲}{۲} (۱ - \frac{۱}{۲}) \pm \text{خر جب} \frac{۲}{۲} (۱ - \frac{۱}{۲})$$

ان اروج میں سے پہلے زوج کے متعلق اجزائے ضربی

$$\text{لاٹ ۱} = \text{جم} \frac{۲}{۲} - \text{خر جب} \frac{۲}{۲}$$

اور لا۔^۱ -^۱ جم $\frac{۲}{ن}$ +^۱ خر جب $\frac{۲}{ن}$
 ہیں جو دونوں ملکر درجہ دوم کے ایک جزو ضربی
 کے مساوی ہیں۔
 لا۔^۲ -^۲ لا جم $\frac{۲}{ن}$ +^۱
 اسی طرح دوسرے زوج کے متعلق درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$$\text{لا۔}^2 -^2 \text{ لا جم } \frac{۲}{ن} +^1$$

ہے علیٰ ہذا القیاس، لہذا حسب دفعہ ما قبل جب ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^1 +^1 = (\text{لا۔}^1 -^1 \text{ لا جم } \frac{۲}{ن} +^1) (\text{لا۔}^2 -^2 \text{ لا جم } \frac{۲}{ن} +^1)$$

$$[\text{لا۔}^2 -^2 \text{ لا جم } \frac{۲(۱-ن)}{ن} +^1] \dots\dots\dots$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے۔

اس صورت میں جملہ ۱ کی قیمتیں حسب ذیل ہوں گی۔

$$\text{جم } \frac{۲}{ن} \pm \text{خر جب } \frac{۲}{ن} \text{ ، جم } \frac{۲}{ن} \pm \text{خر جب } \frac{۲}{ن} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \text{جم } \frac{۲(۲-ن)}{ن} \pm \text{خر جب } \frac{۲(۲-ن)}{ن} \text{ جم } \frac{۲}{ن} \pm \text{خر جب } \frac{۲}{ن}$$

آخری زوج سے صرف ایک قیمت - ۱ حاصل ہوتی ہے پس
 مطلوبہ اجزائے ضربی میں سے لا + ۱ ایک جزو ضربی
 ہے۔

دیگر مندرجہ بالا قیمتوں کے سلسلہ ازدواج کے متعلق درجہ دوم کے
 اجزائے ضربی حسب ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} & \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ \dots\dots\dots \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi(۲-n)}{n} + ۱ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

لہذا بالآخر جب ن طاق ہو تو

$$\begin{aligned} & \text{لا}^2 + ۱ = (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n})(۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n}) \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots [۱ + ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n}] \dots\dots\dots \end{aligned}$$

اختصاراً اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^2 + ۱ = \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ + ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱$$

اور اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^2 + ۱ = (۱ + \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n}) \text{لا}^2 - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱ + ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} - ۲ \text{ لا جم} \frac{\pi}{n} + ۱$$

یہ منوالیہ دفعہ ۱۱۵ کے اساسی منوالیہ میں ن طہ کی بجائے ۲ لکھنے سے بھی آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۲۱۔ مشتق ۱۔ مقادیر جم ن نہ - جم ن طہ اور جم ن نہ - جم ن طہ کو

ن اجزاء مغربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۲) میں لا = ۱ و خ نہ = ۱ لکھو

پس لا = ۱ و خ نہ = ۱ لکھو

$$\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}} = ۱ + ۱ = ۲ \text{ جم} ۲$$

$$۲ - ۱ = ۱$$

$$\frac{۲ - ۱}{۲} = ۱$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - ۱ = ۱$$

$$\frac{۲ - ۱}{۲} = ۱$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

یعنی ن = ۲ × م جب $\frac{م}{ن} = \frac{۳۴}{۶۵}$ م جب $\frac{۲-ن}{۶۵}$

جہاں اجزائے ضربی کی تعداد $\frac{ن}{۶۵}$ - ۱ ہے۔

$$= ۲ - ۱ = \text{جب } \frac{۲}{۲} \text{ جب } \frac{۳}{۲} \dots\dots\dots \text{جب } \frac{۲-ن}{ن} . ۳ \text{ اسلئے}$$

$$\pm \sqrt{2} = \frac{1-5}{2} \quad \text{جب } \frac{22}{29} \quad \text{جب } \frac{23}{29} \quad \dots \dots \dots \text{جب } \frac{2(n-2)}{2n} \quad \dots \dots \dots (1)$$

اب زویا $\frac{\pi_2}{\pi_2}$ ، $\frac{\pi_3}{\pi_3}$ ،، $\frac{\pi_{(n-2)}}{\pi_2}$ میں سے ہر ایک زاویہ، قائمہ سے کم ہے

اس لئے مسامحت (۱) کی بائیں جانب کی سب جہوب مثبت ہیں۔

نبا بریں دائیں جانب کے رکن کی مشتبہ علامت کی بجائے مچ کی علامت لکھنی چاہیئے

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

امثلة ٢٠

ذیل کی متاویز کے اجزاء سے ضربی معلوم کرو۔

$$1 + \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} \quad 1 + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} \quad 1 + \frac{1}{12} = 2 - \frac{1}{12}$$

$$1-5 \quad 1-4 \quad 1-3 \quad 1-2$$

$$1+9 = 9 \qquad 1-9 = 8 \qquad 1+9 = 6$$

$$1-9 \quad 10-11 \quad 12-13 \quad 14-15$$

۱۴۔ اگر ن جنت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1-n}{22} \text{ جب } \frac{2}{27} \text{ جب } \frac{23}{27} \text{ جب } \frac{25}{27} \text{ جب } \dots \dots \dots \text{ جب } \frac{1-n}{27} = 1$$

$$\frac{1-0}{22} = \text{جم } \frac{22}{22} \text{ جم } \frac{23}{22} \text{ جم } \frac{24}{22} \text{ جم } \frac{25}{22} \text{ جم } \frac{26}{22} \text{ جم } \frac{27}{22} \text{ جم } \frac{28}{22} \text{ جم } \frac{29}{22} \text{ جم } \frac{30}{22}$$

قطر ہو تو ثابت کرو کہ

$$و۱ \times و۲ \times و۳ \times و۴ \times و۵ \times و۶ \times و۷ \times و۸ \times و۹ \times و۱۰ \times و۱۱ \times و۱۲ = رن$$

۲۸۔ ن اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع ۱۱ ہے۔ اُن سے اس کے گرد ایک بیرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اس کے سب ماشوں میں سے گزرتا ہے۔ اور ایک اندرونی دائرہ کھینچا گیا ہے جو اندر کی طرف سے اس کے سب اضلاع کو مس کرتا ہے کثیر الاضلاع کے مرکز و میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اندرونی دائرہ سے ق۱ پر اور بیرونی دائرہ سے ق۲ پر ملتا ہے۔ اگر ق۱ اور ق۲ دونوں میں سے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ق۱ میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کو ق۲ میں سے گزرنے والے عمودوں کے حاصل ضرب کے ساتھ نسبت

$$جمن : مم۲ : خط۱ :$$

ہوگی جہاں ط وہ زاویہ ہے جو خطوط و ق۱ اور و۱ کے درمیان بنتا ہے۔
۲۹۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۱ ہے اور مرکز و دائرہ کے اندر ن اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع ۱ سب ج ۵ بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر ق کوئی نقطہ ہو تو

$$ق۱ \times ق۲ \times ق۳ \times ق۴ \times ق۵ \times ق۶ \times ق۷ \times ق۸ \times ق۹ \times ق۱۰ \times ق۱۱ \times ق۱۲ = رن = ۲ \times رن \times جمن ط + و۱ \times رن$$

جہاں ر سے مراد و ق کا طول ہے اور ط سے مراد زاویہ ق و ۱ ہے

نیز ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ ج و ق، ب ق، ج ق ج ق

بالترتیب و ۱، و ۲، و ۳، و ۴، و ۵، و ۶، و ۷، و ۸، و ۹، و ۱۰، و ۱۱، و ۱۲ کے ساتھ بنتے ہیں

$$مس = \frac{رن \times جمن ط}{رن \times جمن ط - و۱ \times رن}$$

اور علیٰ بذالقیاس، اسلئے

$$\text{جب طہ} = \text{طہ} \left(1 - \frac{\text{طہ}}{۱۴}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}}{۲۴۲}\right) \left(1 - \frac{\text{طہ}}{۲۴۳۳}\right) \dots \dots \dots \text{تالانہی}$$

یہ مسئلہ ذیل کی شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\text{جب طہ} = \text{طہ} \cdot \text{II} \cdot \frac{1}{1} \left(1 - \frac{\text{طہ}}{۲۴۳۳}\right)$$

۱۲۳۳ جہ طہ کو اجزاء ضربی کے ایک لائنہای سلسلہ کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرو۔

وقفہ ۱۲۲ کی مسادات (۴) میں طہ کی بجائے مقدار طہ + $\frac{۱۲}{۴}$ لکھو
تب یہ مسادات ہو جائی ہیں

$$\text{جم طہ} = \text{ن}^۲ - ۱ \text{ جب } \frac{\text{طہ} + ۱}{۲۴} \text{ جب } \frac{\text{طہ} + ۲۴۳}{۲۴} \text{ جب } \frac{\text{طہ} + ۲۴۵}{۲۴} \dots$$

$$\dots \dots \dots \text{جب } \frac{\text{طہ} + ۱ - (۲ - \text{ن}^۲)}{۲۴} \dots \dots \dots (۱)$$

آخری جزو ضربی

$$= \text{جب } \left[\frac{\text{طہ} + ۱ - (۲ - \text{ن}^۲)}{۲۴} \right] = \text{جب } \frac{\text{طہ} - ۱}{۲۴}$$

آخر کی طرف سے دوسرا جزو ضربی

$$= \text{جب } \left[\frac{\text{طہ} + ۱ - (۲ - \text{ن}^۲)}{۲۴} \right] = \text{جب } \frac{\text{طہ} - ۲۴۳}{۲۴}$$

اور علیٰ بذالقیاس

لہذا حسب سابق دو دو اجزاء ضربی کو اکٹھا لینے سے

$$\text{جم ط} = ۱ - \frac{\pi}{n} = \left[\text{جب } \frac{\pi^2 + \pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2 - \pi}{n} \right] \left[\text{جب } \frac{\pi^2 + \pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2 - \pi}{n} \right] \dots \dots \dots$$

$$= 1 - \frac{\pi}{n} = \left[\text{جب } \frac{\pi^2}{n} - \text{جب } \frac{\pi^2}{n} \right] \left[\text{جب } \frac{\pi^2}{n} - \text{جب } \frac{\pi^2}{n} \right] \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۲) میں ط کو صفر بنانے سے

$$1 - \frac{\pi}{n} = \left[\text{جب } \frac{\pi^2}{n} - \text{جب } \frac{\pi^2}{n} \right] \left[\text{جب } \frac{\pi^2}{n} - \text{جب } \frac{\pi^2}{n} \right] \dots \dots \dots (۳)$$

مساوات (۲) کو (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{جم ط} = \left[1 - \frac{\text{جب } \frac{\pi^2}{n}}{\text{جب } \frac{\pi^2}{n}} \right] \left[1 - \frac{\text{جب } \frac{\pi^2}{n}}{\text{جب } \frac{\pi^2}{n}} \right] \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \left[1 - \frac{\text{جب } \frac{\pi^2}{n}}{\text{جب } \frac{\pi^2}{n(1-n)}} \right] \dots \dots \dots (۴)$$

اب مساوات (۴) میں n کو لا انتہا بڑھانا دو، تب حسب دفعہ ماقبل

$$\text{جم ط} = \left[1 - \frac{\pi^2}{\pi^2} \right] \left[1 - \frac{\pi^2}{\pi^2} \right] \left[1 - \frac{\pi^2}{\pi^2} \right] \dots \dots \dots$$

اختصار کی خاطر اس مسئلہ کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{جم ط} = \prod_{r=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{\pi^2 (1-r^2)} \right\}$$

چونکہ $\text{جم ط} = \frac{\text{جب } \pi^2}{\text{جب } \pi^2}$

اس لئے جم ط کا حاصل ضرب $\frac{\text{جب } \pi^2}{\text{جب } \pi^2}$ اور جب ط کے حاصل ضرب

جمع معلوم کر سکتے ہیں

دفعہ ۲۳ اور ۱۲۲ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$(-1)^{\frac{p}{2}} \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \dots \dots \dots (-1)^{\frac{p}{2}} \dots \dots \dots$$

$$= \frac{p}{2} = 1 - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \dots \dots \dots$$

طرفین کے لوکار تم لینے سے

$$\dots \dots \dots + \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) \text{ لوک} + \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) \text{ لوک} + \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) \text{ لوک} \dots \dots \dots$$

$$(1) \dots \dots \dots = \text{لوک} \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \dots \dots \dots \right]$$

اب دفعہ ۸ کی مدد سے

$$\text{لوک} \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) = \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right]$$

$$\text{اور لوک} \left((-1)^{\frac{p}{2}} - 1 \right) = \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right]$$

لہذا مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$\left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right] - \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right]$$

$$= \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right] - \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right]$$

$$= \text{لوک} \left[(-1)^{\frac{p}{2}} - 1 + \frac{p^2}{24} - \frac{p^4}{5!} + \frac{p^6}{720} - \dots \dots \dots \right]$$

$$\begin{aligned} & \dots - \left(\dots + \frac{7}{120} - \frac{7}{4} \right) \frac{1}{2} - \left(\dots + \frac{7}{120} - \frac{7}{4} \right) = \\ & \dots - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{120} \right) \frac{7}{4} = \\ & (2) \dots - \frac{7}{180} \frac{7}{4} = \end{aligned}$$

چونکہ مساوات (۲) طہ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اسلئے طہ کے سرسادات کے دونوں جانب برابر ہونے چاہئیں نیز طہ کے سربراہ ہونے چاہئیں، وغیرہ وغیرہ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} - = \frac{1}{11} \left(\dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \right) \\ & \frac{1}{180} - = \frac{1}{11} \times \frac{1}{2} \left(\dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \right) \end{aligned}$$

$$(3) \dots \frac{7}{4} = \dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \text{ لہذا}$$

$$(4) \dots \frac{7}{9} = \dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \frac{1}{11} \text{ اور}$$

۱۲۷۔ یہی عمل دفعہ ۱۲۳ کے سلسلہ پر کرنے سے

$$\dots \left(\frac{7}{11} - 1 \right) \left(\frac{7}{11} - 1 \right) \left(\frac{7}{11} - 1 \right)$$

$$\dots = \text{جمہ طہ} = \frac{7}{11} + \frac{7}{11}$$

$$\dots + \left(\frac{7}{11} - 1 \right) \text{ لوک} + \left(\frac{7}{11} - 1 \right) \text{ لوک} + \left(\frac{7}{11} - 1 \right) \text{ لوک}$$

$$= \text{لوک} \left(\dots - \frac{7}{11} + \frac{7}{11} - 1 \right)$$

لہذا حسب سابق

$$\begin{aligned}
 & \left(\dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \right) \frac{2^2}{2^2} - \\
 & \dots + \left(\dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \right) \frac{2^4}{2^2} - \\
 & = \text{لاک} [(\dots + \frac{2^2}{2^2} - \frac{2^2}{2^2}) - 1] = \\
 & \dots + \left(\dots + \frac{2^2}{2^2} - \frac{2^2}{2^2} \right) \frac{1}{2} - \left(\dots + \frac{2^2}{2^2} - \frac{2^2}{2^2} \right) - = \\
 & \dots - \left(\dots - \frac{2^2}{2^2} \right) \frac{1}{2} - \dots + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^2}{2^2} - = \\
 & \dots - \frac{2^2}{2^2} - \frac{2^2}{2^2} - = \\
 & \text{طہ کے سروں کو مساوی کرنے سے}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} - = \left(\dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \right) \frac{2^2}{2^2} -$$

اور طہ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\frac{1}{12} - = \left(\dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \right) \frac{2^2}{2^2} -$$

..... علیٰ ہذا تقیاس

$$(۱) \dots \frac{2^2}{2^2} = \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \quad \text{یعنی}$$

$$(۲) \dots \frac{2^2}{2^2} = \dots + \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} \quad \text{اور}$$

.....

۱۲۸ - واس کا ضابطہ دفعہ ۱۲۲ کے جدول میں طہ کو $\frac{\pi}{2}$ کے مساوی رکھتے ہیں

$$1 = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} \right] \left[1 - \frac{1}{3^2} \right] \left[1 - \frac{1}{4^2} \right] \dots \dots \dots \text{تالانتا ہی}$$

$$\frac{(1+2N)(1-N)}{2(N)} \times \frac{(1-2)(3-N)}{2(2-N)} \dots \dots \frac{4 \times 5}{2^4} \times \frac{5 \times 3}{2^5} \times \frac{3 \times 1}{2^3} \times \frac{\pi}{2} =$$

جہاں N لانتہا بڑا ہے

$$\frac{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \dots \times 2^N \times 2^{N+1}}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \dots \times 2^N \times 2^{N+1}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{یعنی } \frac{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \dots \times 2^N \times 2^{N+1}}{(1-N) \dots \dots \times 5 \times 3 \times 1} = \frac{\pi}{2} (1+N)$$

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر N بہت بڑا ہو (لیکن ضروری نہیں کہ لانتہا ہی ہو) تو

$$\frac{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \dots \times 2^N \times 2^{N+1}}{(1-N) \dots \dots \times 5 \times 3 \times 1} \approx \frac{\pi}{2} (1+N)$$

جو بالآخر = πN

اس ضابطہ کو واس کا ضابطہ کہتے ہیں۔ اور اس سے اس نسبت کی تقریبی

قیمت نہایت آسان اور ساوہ شکل میں ظاہر ہوتی ہے جو پہلے N جنت اعداد کے

حاصل ضرب کو پہلے N طاق اعداد کے حاصل ضرب کے ساتھ ہے جبکہ N بہت بڑا ہو

۱۲۹ - مشق - ثابت کرو کہ

$$\left\{ \dots + \frac{1}{2^2 - 2^1} + \frac{1}{2^3 - 2^2} + \frac{1}{2^4 - 2^3} + \dots \right\}$$

دفعہ ۱۲۳ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوک حجم طہ} = \text{لوک } \left(1 - \frac{2^1}{2^2} \right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{2^2}{2^3} \right) + \text{لوک } \left(1 - \frac{2^3}{2^4} \right) + \dots + (1)$$

اس مساوات میں ط کی بجائے (ط + ہ) لکھنے سے

$$\text{لوک جم (ط + ہ)} = \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} (\text{ط} + \text{ہ}) \right] + \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^3} (\text{ط} + \text{ہ}) \right] + \dots + (2)$$

$$\text{اب لوک جم (ط + ہ)} = \text{لوک} [\text{جم ط (جم ہ - مس ط جب ہ)}]$$

$$= \text{لوک جم ط + لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} + \dots - \text{مس ط (ہ - } \frac{2}{2^2} + \dots) \right] \text{ دفعہ ۳۳}$$

$$= \text{لوک جم ط + لوک} [1 - \text{مس ط + ہ کی بڑی قوتیں}]$$

$$= \text{لوک جم ط - مس ط + ہ کی بڑی قوتیں} \dots \dots \dots (\text{دفعہ ۸})$$

$$\text{نیز لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} (\text{ط} + \text{ہ}) \right] = \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} \text{ط} \right] + \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} \text{ہ} \right] + \dots$$

$$= \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} \text{ط} \right] - \frac{2}{2^2} \text{ہ} + \text{ہ کی بڑی قوتیں}$$

$$\text{اور لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} (\text{ط} + \text{ہ}) \right]$$

$$= \text{لوک} \left[1 - \frac{2}{2^2} \text{ط} \right] - \frac{2}{2^2} \text{ہ} + \text{ہ کی قوتیں} -$$

.....

مساوات (۲) میں یہ قیمتیں درج کرنے اور مساوات کے دونوں طرف

'-ہ' کے مردوں کو برابر کرنے سے

$$\text{مس ط} = \frac{2}{2^2} \text{ط} + \frac{2}{2^3} \text{ط} + \frac{2}{2^4} \text{ط} + \dots + (3)$$

$$= \frac{2}{2^2} \text{ط} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = \frac{2}{2^2} \text{ط} \times \infty$$

سلسلہ (۳) کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{2}{2 - \pi} - \frac{2}{2 + \pi} + \frac{2}{2 - \pi} - \frac{2}{2 + \pi} + \dots$$

جو طالب علم احصاء و تفرقات سے واقف ہے۔ اس سے مخفی نہیں کہ مساوات

(۳) مساوات (۱) کو بلحاظ طہ کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۳۰۔ مشتق۔ ثابت کرو کہ جمر ۲ عہ۔ جم ۲ طہ

$$= 2 \text{ جب } 2 \text{ طہ} \left[1 + \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 + \frac{2}{2 + \pi} \right] \left[1 + \frac{2}{2 - \pi} \right] \dots$$

$$\dots \left[1 + \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 + \frac{2}{2 + \pi} \right] \dots$$

$$= 2 \text{ جب } 2 \text{ طہ} \left[1 + \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 + \frac{2}{2 + \pi} \right] \dots$$

جہاں ۲ صفر ہے یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

جمر ۲ عہ۔ جم ۲ طہ = جمر ۲ خ عہ۔ جم ۲ طہ = ۲ جب (طہ + خ عہ) جب (طہ - خ عہ)

$$= 2 \text{ جب } (طہ + خ عہ) \left[1 - \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 - \frac{2}{2 + \pi} \right] \dots$$

$$\dots \left[1 - \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 - \frac{2}{2 + \pi} \right] \dots (1)$$

$$\text{اب} \left[1 - \frac{2}{2 - \pi} \right] \left[1 - \frac{2}{2 + \pi} \right] \dots$$

$$= \left[\frac{(طہ + خ عہ)(2 - \pi)}{2} \right] \left[\frac{(طہ - خ عہ)(2 + \pi)}{2} \right] =$$

$$= \frac{2 + 2(طہ - \pi)}{2} \times \frac{2 + 2(طہ + \pi)}{2} =$$

$$۲ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{.....} \quad \text{شال تباہی} = \frac{(n-1)}{n}$$

$$۳ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{.....} \quad \text{شال تباہی} = \frac{n-2}{n}$$

$$۴ = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{.....} \quad \text{شال تباہی} = \frac{(n-3)}{n}$$

۵۔ ثابت کرو کہ اگر تمام طاق اعداد کے مربعوں کے متکافوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{n^2-1}{4}$ ہوتا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ اگر تمام طبعی اعداد کے مربعوں کے متکافوں میں سے دو دو کو باہم ضرب دیا جائے تو ان حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{n^2-1}{3}$ ہوگا۔
ثابت کرو کہ

$$۷۔ ۱ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots$$

$$۸۔ ۱ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$۱ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots$$

$$\left[\text{رابطہ رقم} = \frac{1}{n} \left(\text{مس} \frac{1}{n} + \text{مم} \frac{1}{n} \right) \text{ کو استعمال کرو} \right]$$

$$۹۔ \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$\left[\text{رابطہ نقطہ} = \text{سس} \left(\frac{\pi}{\phi} + \frac{\pi}{\phi} \right) + \text{مم} \left(\frac{\pi}{\phi} + \frac{\pi}{\phi} \right) \right] \text{کو استعمال کرو}$$

$$10 - \frac{1}{\pi} \text{ نقطہ} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2 - \pi} + \frac{1}{\pi^2 + \pi} + \frac{1}{\pi^2 - \pi} + \frac{1}{\pi^2 + \pi} + \dots \right)$$

[دفعہ ۱۲۹ کا عمل اسی دفعہ کے جواب پر دوبارہ کرو] تا لامتناہی

$$11 - \text{قم}^2 \text{ نقطہ} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2 - \pi} + \frac{1}{\pi^2 + \pi} + \frac{1}{\pi^2 - \pi} + \frac{1}{\pi^2 + \pi} + \dots$$

..... ۳ تا لامتناہی

ثابت کرو کہ

$$12 - \frac{\text{جب (عہ - طہ)}}{\text{جب عہ}} = \left(\frac{\pi}{\phi} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{\phi} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{\phi} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{\phi} + 1 \right) \dots \left(\frac{\pi}{\phi} - 1 \right) \left(\frac{\pi}{\phi} + 1 \right)$$

$$= \Pi \left(\frac{\pi}{\phi} - 1 \right) \text{ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے یا منفی ہے۔}$$

$$13 - \frac{\text{جب (عہ + طہ)}}{\text{جب عہ}} = \Pi \left(\frac{\pi}{\phi} + 1 \right) \text{ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی صحیح}$$

عدد ہے یا منفی ہے۔

$$14 - \frac{\text{جم (عہ - طہ)}}{\text{جم عہ}} = \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} + 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} + 1 \right) \dots \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} - 1 \right) \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} + 1 \right)$$

$$= \Pi \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} + 1 \right) \text{ جہاں ر سے مراد کوئی مثبت یا منفی طاق صحیح عدد ہے۔}$$

$$15 - \frac{\text{جم (عہ - طہ)}}{\text{جم عہ}} = \Pi \left(\frac{\pi^2}{\phi^2} - 1 \right) \text{ جہاں ر کوئی مثبت یا منفی طاق}$$

صحیح عدد ہے۔

$$\left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م} + 3)} - 1 \right] \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \text{م})} - 1 \right] \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م})} - 1 \right] = \frac{\text{جم ط} + \text{جم ع}}{1 + \text{جم ع}}$$

$$\left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م} + 3)} - 1 \right] \Pi = \dots \dots \dots \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \text{م} + 3)} - 1 \right]$$

یسنی طاق صحیح عدد ہے۔

[مشق ۱۴ اور ۱۵ کے جوابوں کو ضرب دو اور پھر ۲ ط کو ط میں اور ۲ ع کو

ع میں بدل دو]

$$\left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م} + 3)} - 1 \right\} \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2\text{ع}} - 1 \right\} = \frac{\text{جم ط} - \text{جم ع}}{1 - \text{جم ع}}$$

$$\left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م} + 3)} - 1 \right] \Pi = \dots \dots \dots \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \text{م} + 3)} - 1 \right\} \left\{ \frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \text{م})} - 1 \right\}$$

کوئی مثبت یا سنی صحیح عدد ہے یا صفر ہے۔

اس سے جہز ۶ - جم ع کے اجزائے ضربی مستنبط کرو۔

$$18 = \frac{\text{جب ع} - \text{جب ط}}{\text{جب ع}} = (1 - \frac{\text{ط}}{\text{ع}}) (1 - \frac{\text{ط}}{\text{ع} - \text{م}}) (1 + \frac{\text{ط}}{\text{ع} + \text{م}})$$

$$\dots \dots \dots (1 + \frac{\text{ط}}{\text{ع} - \text{م} + 3}) (1 - \frac{\text{ط}}{\text{ع} + \text{م} + 3})$$

$$19 = 2 - 2\text{جہز ط} + 2\text{جم ط} = \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م})} + 1 \right] \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} - \text{م})} + 1 \right] \dots \dots \dots$$

$$20 = 2\text{جم ع} \Pi \left[\frac{\text{ط}^2}{2(\text{ع} + \text{م} + 3)} + 1 \right] \text{جہاں کوئی مثبت}$$

یسنی طاق صحیح عدد ہے

۲۰۔ ثابت کرو کہ

$$\left[\frac{\text{جیز } ۲}{۲} + ۱ \right]^{۱-۲} \text{جیز } ۲ \text{ II جیز } ۱ = \text{ن جیز } ۱$$

اور اس سے جیز ۱ کے اجزائے منزلی کے لئے حاصل ضربوں کا ایک ایسا لاقناہی سلسلہ مستنبط کرو جس کا ہر جز و منزلی بلحاظ ۱ کے درجہ دوم کی ایک نام ہو۔ [دفعہ ۲۱ کی مشق اول کے جواب سے شروع کرو پہلے طہ کو صفر بناؤ اور پھر اسس جواب میں فہ کو صفر کر دو بعد ازاں تقسیم کرو]

۲۱۔ ثابت کرو کہ لاقناہی سلسلہ

$$\left(\frac{۱}{۱} + ۱ \right) \left(\frac{۱}{۲} + ۱ \right) \left(\frac{۱}{۳} + ۱ \right) \dots \dots \dots$$

کا حاصل ضرب $\frac{۱}{۱}$ جیز ۱ ہے۔

۲۲۔ ایک نصف دائرہ کے محیط کے م برابر حصے کئے گئے ہیں اور ایک دوسرے ہم مرکز نصف دائرہ کے جو پہلے نصف دائرہ کے ہم وضع رکھا گیا ہے ن برابر حصے کئے گئے ہیں۔ پہلے نصف دائرہ کا ہر ایک نقطہ تقسیم دوسرے نصف دائرہ کے ہر ایک نقطہ تقسیم سے ملایا گیا ہے۔ ان نقاط کے ملنے والے خطوں کے مربعوں کا اوسط حسابی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اگر ہم اور ن کو لا انتہا بڑا دیا جائے تو اوسط مذکور ۱/۲ ہوگا۔ جہاں ۱/۲ اور ۱/۳ نصف دائروں کے نصف قطر ہیں۔

۲۳۔ ہم مرکز دائروں کا ایک لاقناہی نظام دیا ہوا ہے، ان دائروں کے نصف قطر بالترتیب $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، ... ہیں۔ ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ مشترک مرکز سے ج (ک) ہے سب دائروں کے تماس پھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ان تماسوں کے مماسی مشترک

مرکز پر بالترتیب $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، ... طہ، طہ، ... بنیں تو

$$\left| \frac{\frac{ج}{4\pi}}{\frac{4\pi}{ج}} \right| = \dots\dots\dots$$

۲۴۔ نقاط کی ایک لامتناہی تعداد ایک لامتناہی طول کے خط مستقیم کو مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ ہر مساوی حصہ کا طول ۱ ہے، اگر ن ایک ایسا نقطہ ہو جس کا فاصلہ خط مستقیم سے ماہو اور ایک نقطہ تقسیم سے ن کا وہ فاصلہ جو خط مستقیم پر ناپا جائے لاہو تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کے چونکہ ملے سب نقاط تقسیم سے ہیں ان کے متکا فیروں کے مربعوں کا مجموعہ

$$\frac{\frac{1}{4} \pi^2}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{4} \pi^2}{1} - \frac{\frac{1}{4} \pi^2}{1}$$

ہوگا۔ [مشق ۷ کے جواب کو استعمال کرو]

۲۵۔ اگر 'ا' ب' ج' سے تمام مفرد اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، مراد لئے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\dots\dots = \frac{1}{2}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

$$\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots\dots \right] \times \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\dots\dots \right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ج}{\frac{1}{2} \pi^2} = \frac{ج}{\frac{1}{2} \pi^2} - \frac{ج}{\frac{1}{2} \pi^2}$$

باب دوم

اصول اجزائے متناسب

۱۳۱۔ اس باب میں ہم اجزائے متناسب کے اصول پر بحث کریں گے۔ اس اصول کی صداقت کو ہم نے حصہ اول باب یازدہم میں بلا ثبوت تسلیم کر لیا تھا۔ وہاں ہم نے یہ تسلیم کیا تھا کہ اگر n اور m دو متصل اعداد ہوں جن کے لوکارتم جدولوں میں دئے ہوئے ہوں اور اگر h کوئی کسر ہو تو اعشاریہ کے ساتویں مقام تک

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} \\ \text{لوک (ن + ۱) - لوک ن} = - \frac{h}{n}$$

اب ہم اس بیان کی صحت پر غور کریں گے۔

۱۳۲۔ مروج لوکارتم - دفعہ ۱۲ کی رو سے

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} = \text{لوک } \frac{ن + ہ}{ن} = \text{مب لوک } \left(۱ + \frac{ہ}{ن} \right)$$

$$\text{جہاں مب} = ۱۲۳۲۲۹۲۲۸ \dots$$

پس دفعہ ۸ کی رو سے

$$\text{لوک (ن + ہ) - لوک ن} = \text{مب } \frac{ہ}{ن} = \frac{۲}{۲} \times \frac{ہ}{ن} + \frac{۲}{۲} \times \frac{ہ}{ن} = \frac{۲}{۲} \times \frac{ہ}{ن} + \frac{۲}{۲} \times \frac{ہ}{ن}$$

اب لوکارتم کی معمولی جدولوں میں $\frac{۲}{۲} \times \frac{ہ}{ن}$ پانچ ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے

مقدار $\frac{۱۰}{۲۰}$ کو $\frac{۱}{۲}$ سے کم بنا دے۔

یعنی $\frac{۱۰}{۲۰} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۰}{۴۰}$

چونکہ $\frac{۱۰}{۲۰}$ سے بڑی قیمت ایک ہو سکتی ہے اس لئے

$\frac{۱۰}{۲۰} \times \frac{۱}{۲}$ یعنی $\frac{۱۰}{۴۰}$

∴ $\frac{۱۰}{۲۰} < \frac{۱}{۲}$

اس لئے مطلوبہ چھوٹے سے چھوٹا عدد ۱۲۷۳ ہے

۱۳۴۔ طبعی جیوب۔ فرض کرو کہ ایک جدول میں زاویوں

کے متواتر فرقوں کے لئے ہمارے پاس اندراجات موجود ہیں۔

اور ان متواتر فرقوں میں سے ہر ایک میں نیم قطری زاویوں

کی تعداد $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

[ہماری معمولی جدولوں میں $\frac{۱}{۲}$ = آئیں کے نیم قطریوں کی تعداد]

$$۶۰۰۰۲۹۰۸۸۸..... = \frac{۲۱}{۱۸۰ \times ۶۰} =$$

یعنی $\frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۲}$

نیز فرض کرو کہ $\frac{۱}{۲}$ سے کم ہے۔ ہمارا اصول یہ تھا کہ

$$\frac{\text{جب (ط + ک) - جب ط}}{\text{جب (ط + ط) - جب ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ط}}$$

اب ہم اس مفروضہ کے جواز پر غور کرتے ہیں۔

جب (ط + ک) - جب ط = جب ط جم ک + جم ط جب ک - جب ط

= جب ط [۱ - $\frac{ک}{ط}$ + $\frac{ک}{ط}$ - $\frac{ک}{ط}$] + جم ط [ک - $\frac{ک}{ط}$ + $\frac{ک}{ط}$ - $\frac{ک}{ط}$] - جب ط

... (دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$$= \text{ک جم ط} - \frac{ک}{ط} \text{ جب ط} - \frac{ک}{ط} \text{ جم ط} \dots$$

تیسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ = $\frac{۱}{۲}$ ک اور یہ ہمیشہ $\frac{۱}{۲}$ (۳۰۰۰۰۰) سے یعنی ۲۰۰۰۰۰۰۰ سے کم ہوتی ہے۔ پس تیسری رقم اور رقوم مابعد بلا خوف نظر انداز کی جاسکتی ہیں۔ تب

جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط - جب ط (۱)

پہلی رقم کی عددی نسبت دوسری رقم کے ساتھ

= $\frac{۱}{۲}$ ک مس ط (۲)

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جب ط $\frac{۱}{۲}$ کے تقریباً برابر ہو اس لئے سوائے اس صورت کے جب زاویہ ط قائمہ کے تقریباً برابر ہو مساوات (۱) میں دوسری رقم کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے

تب جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط

اسی طرح سے جب (ط + ہ) - جب ط = ہ جم ط

لہذا
$$\frac{\text{جب (ط + ک) - جب ط}}{\text{جب (ط + ہ) - جب ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ہ}} \dots \dots (۳)$$

اگر ط زاویہ قائمہ کے بالکل قریب ہو تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ جب (ط + ک) - جب ط = ک جم ط

اور اس لئے ربط (۳) اس صورت میں قائم نہیں رہتا اور حیب کا فرق زاویہ کے فرق کے متناسب نہیں ہوتا پس اس صورت میں فرق بے قاعدہ ہوتے ہیں لیکن ساتھ ہی فرق نہایت خفیف ہونگے کیونکہ اگر ط $\frac{۱}{۲}$ کے بالکل قریب ہو تو ک جم ط بہت چھوٹا ہوگا۔ دراصل اگر زاویہ ط اور زاویہ قائمہ کا فرق چند

نٹوں سے متجاوز نہ ہو تو کجم ط کی قیمت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک سب صفر ہوں گے۔ نیز

ک^۱ جب ط ہمیشہ $\langle \frac{60000}{p} \rangle$ یعنی $\langle \dots 5 \dots 00000 \rangle$

اس سے ثابت ہوا کہ جب زاویہ ط قائمہ کے بالکل قریب ہو تو زاویہ ط میں نسبتاً زیادہ تبدیلی واقع ہونے سے زاویہ مذکور کی جیب میں نسبتاً تھوڑی تبدیلی واقع ہوگی نیز یہ تبدیلیاں بے قاعدہ ہوں گی۔

۱۳۵۔ طبعی جیب التمام۔ چونکہ کسی زاویہ کی جیب التمام زاویہ مذکور کے متمم کی جیب کے برابر ہوتی ہے اس لئے یہ صورت بھی درحقیقت جیب ہی کی صورت کے مائل ہے۔ پس اصول مذکورہ برقرار رہے گا سوائے اس صورت کے جب زاویہ ط صفر کے قریب ہو، مگر الذکر صورت میں فرق حسب سابق بے قاعدہ اور نہایت خفیف ہوں گے۔

۱۳۶۔ طبعی مماسات۔ سابقہ طریق کتابت کے بموجب

$$\text{مس (ط + ک)} - \text{مس ط} = \frac{\text{مس ط} + \text{مس ک}}{1 - \frac{\text{مس ط مس ک}}{\text{مس ط}}}$$

مس ک قطا ط

$$= \frac{1 - \text{مس ط مس ک}}{\text{مس ط}}$$

$$= \text{مس ک قطا ط} (1 + \text{مس ط مس ک} + \text{مس ط مس ک} + \dots)$$

$$= \text{قطا ط} \left[\text{ک} + \frac{\text{ک}^2}{p} + \dots \right] \left[1 + \text{مس ط (ک} + \frac{\text{ک}^2}{p} + \dots) \right]$$

$$+ \text{مس ط (ک} + \frac{\text{ک}^2}{p} + \dots) \dots \text{(دفعہ ۳۴)}$$

$$= \text{ک قطا ط} + \frac{\text{ک}^2 \text{ قطا ط}}{p} + \text{ک قطا ط} \left[\frac{1}{p} + \text{مس ط} \right] + \dots (1)$$

تیسری رقم اور رقوم مابعد حسب سابق ترک کی جاسکتی ہیں سوائے اس صورت کے جب زاویہ طہ قائمہ کے بہت قریب ہو۔

تب اگر مقدار ک^۱ جب طہ بہت بڑی نہ ہو تو
مس (طہ + ک) = فکس طہ = ک قطا طہ (۲)

اور اصول تقریباً درست اور برقرار رہیگا۔

اگر طہ کے $\frac{1}{10}$ ، تو مساوات (۱) کی دوسری رقم کے ۲ ک^۱ پس اگر ہم ک کی بڑی سے بڑی قیمت (یعنی تقریباً ۳۰۰۰) لیں تو اس سے اعشاریہ کے ساتویں مقام پر ملحوظ ہندسہ آئیگا۔ اسہذا جب جدول کے زاویوں کا فرق آ ہو تو اصول زیر بحث $\frac{1}{10}$ سے بڑے زاویوں کے لئے درست نہیں ہوگا۔

۱۳۷۔ طبعی مقامات التمام۔ حسب دفعہ ماقبل یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اصول مذکورہ ان زاویوں کے لئے جو صفر اور ۵۵° کے درمیان واقع ہوں قابل اعتبار نہیں۔

۱۳۸۔ طبعی قاطع۔ ہم جانتے ہیں کہ قط (طہ + ک) = قطا طہ

$$\frac{1}{\text{جم طہ جم ک}} = \frac{1}{\text{جب طہ جب ک}} = \frac{1}{\text{جم طہ}}$$

$$\left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{مس طہ}} - \frac{1}{\text{ک}} \dots} \right\} = \text{قط طہ}$$

$$= \text{قط طہ} \left[\text{مس طہ} + \text{ک} \left(\frac{1}{\text{مس طہ}} + \frac{1}{\text{ک}} \right) + \dots \right]$$

$$= \text{ک قطا طہ مس طہ} + \text{ک قطا طہ} \left(\frac{1}{\text{مس طہ}} + \frac{1}{\text{ک}} \right) + \dots (۱)$$

دوسری رقم کی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= \frac{1 + مس ط}{مس ط} = ک [1 + مم ط + مس ط]$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط صفر یا ۱۱ کے بہت قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے
قط (ط + ک) - قط ط = ک مس ط قط ط

پس اصول مذکور ثابت ہوا۔

اگر ط بہت چھوٹا ہو تو رقم ک قط ط مس ط بہت چھوٹی ہوگی اور فرق بے قاعدہ ہونے کے علاوہ نہایت خفیف ہونگے اگر ط ۱۱ کے بالکل قریب ہو تو یہ رقم بڑی ہوگی اس لئے اس صورت میں فرق خفیف نہ ہوں گے۔

۱۳۹۔ طبعی قاطع التمام۔ جسے قاطع کی صورت میں ثابت کیا گیا ہے ویسے ہی قاطع التمام کی صورت میں بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ فرق خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط ۹۰ کے قریب ہو اور بے قاعدہ ہوں گے اگر ط صفر کے قریب ہو۔ سوائے ان صورتوں کے اصول برقرار رہتا ہے۔

۱۴۰۔ لوکا تھی جیوب کی جدولوں کے متعلق۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$ل جب (ط + ک) - ل جب ط = لوک جب (ط + ک)$$

$$= لوک [جم ک + مم ط جب ک] = لوک [۱ + ک مم ط - ک ...]$$

(دفعات ۳۲ اور ۳۳)

$$= \text{مب} \left[\text{ک} \text{م} \text{ط} - \frac{\text{ک}^2}{\text{م}^2} - \frac{\text{ک}^2}{\text{م}^2} + \dots \right] \quad (\text{دفعات } ۸ \text{ اور } ۱۲)$$

$$= \text{مب} \text{ک} \text{م} \text{ط} - \frac{\text{مب}^2 \text{ک}^2}{\text{م}^2} \dots \dots \dots$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

$$= \frac{\frac{1}{2} \text{ک}}{\text{جب} \text{ط} \text{م} \text{ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{جب} \text{م} \text{ط}}$$

یہ نسبت بہت چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ ط صفر یا
زاویہ قائمہ کے قریب ہو۔

لہذا سوائے ان دو صورتوں کے

$$\text{ل جب} (\text{ط} + \text{ک}) - \text{ل جب} \text{ط} = \text{مب} \text{م} \text{ط} \times \text{ک}$$

بہں اصول عام طور پر درست ہے۔

اگر ط چھوٹا ہو تو رقم مب ک م ط بڑی ہوگی اور بنا برین فرق بڑے اور
بے قاعدہ ہونگے۔ اس لئے ہم اُن جدولوں میں جو ا کے فرق پر مرتب
کی گئی ہوں چھوٹے زاویوں پر اس اصول کا اطلاق نہیں کر سکتے۔

نیز خواہ جدولیں ۱۰ کے فرقوں پر مرتب کی گئی ہوں تو بھی ہم اشاریہ
کے ساتویں مقام پر غلطی کے احتمال سے مطمئن نہیں ہو سکتے تا وقتیکہ ط ۵
سے بڑا نہ ہو۔

اگر ط ۹۰ کے بہت قریب ہو تو رقوم مب ک م ط اور مب ک م ط
دونوں بہت چھوٹی ہونگی۔ لہذا اگر ط زاویہ قائمہ کے قریب ہو تو فرق
خفیف اور بے قاعدہ ہوں گے۔

۱۴۱۔ لوکارٹی جیب التمام کی جدولوں کے متعلق۔ چونکہ کسی زاویہ کی

جیب اس زاویہ کے متمم کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اس لئے اس صورت میں بھی اصول مذکور برقرار رہتا ہے سوائے ان دو صورتوں کے جب زاویہ بہت چھوٹا ہو یا ۹۰ کے قریب ہو پہلی صورت میں فرق بے قاعدہ اور نیز خفیف ہوں گے اور دوسری صورت میں یہ بہت بڑے ہوں گے۔

۱۴۲۔ لوکار تہی ماسوں کی جدولوں کے متعلق۔ اس صورت میں
 ل مس (ط + ک)۔ ل مس ط

$$= \text{لوک} \frac{\text{مس (ط + ک)}}{\text{مس ط}} = \text{لوک} \frac{۱ + \text{م م مس ک}}{۱ - \text{مس ط مس ک}}$$

$$= \text{لوک} \left[\frac{۱ + \text{ک م م ط}}{۱ - \text{مس ط}} \right]$$

$$= \text{لوک} \left[(۱ + \text{ک م م ط}) (۱ + \text{ک مس ط} + \text{ک مس ط} + \text{ک مس ط} + \dots) \right]$$

$$= \text{لوک} \left[۱ + \frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{جم ط}^۲} + \dots \right]$$

$$= \text{مب} \left[\frac{\text{ک}}{\text{جب ط جم ط}} + \frac{\text{ک}^۲}{\text{جم ط}^۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{\text{ک}^۳}{\text{جب ط جم ط}^۳} + \dots \right]$$

(دفعات ۸ اور ۱۲)

$$= \frac{\text{مب ک}}{\text{جب ط جم ط}} - \frac{۲ \text{ مب ک}^۲}{\text{جب ط}^۲ \text{ جم ط}^۲} + \dots$$

دوسری رقم کی عددی نسبت پہلی رقم کے ساتھ

= ک م م ط اور یہ چھوٹی ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ

زاویہ طہ صفر یا زاویہ قائمہ کے قریب ہو اس لئے سوائے ان دو صورتوں کے

$$ل مس (طہ + ک) - ل مس طہ = \frac{۲}{جب ۲ طہ} \times ک$$

 یعنی اصول بالعموم قائم رہیگا۔

متذکرہ بالا دونوں مشتقہ صورتوں میں جب ۲ طہ چھوٹا نہیں ہوگا اسلئے
 فرق بے قاعدہ ہوں گے لیکن خفیف نہیں ہوں گے۔

یہی الفاظ ماس التمام کے لوکارتوں کی جدولوں کیلئے بھی درست ہوں گے۔
 ۳۴۔ لوکارتی قاطع اور قاطع التمام کی جدولوں کے متعلق۔

اس صورت میں

$$ل ق ط (طہ + ک) - ل ق ط طہ = ل جم طہ - ل جم (طہ + ک)$$

 اور
$$ل قم (طہ + ک) - ل قم طہ = ل جب طہ - ل جب (طہ + ک)$$

 اس لئے ل جب طہ اور ل جم طہ کے نتائج بالترتیب ل قم طہ
 اور ل ق ط طہ پر سب مصادق آئینگے۔



باب یازدہم

اغلاط مشاہدہ

۱۴۴۔ اب تک ہم یہ تسلیم کرتے رہے ہیں کہ کسی زاویہ کا مشاہدہ پوری پوری صحت کے ساتھ ہر صورت میں ممکن ہے لیکن فی الحقیقت ایسا نہیں ہوتا۔ ہمارے مشاہدات دو قسم کی اغلاط کے مورد ہو سکتے ہیں اولاً وہ جو کہ آلات کی نادرستی کی وجہ سے وقوع میں آتی ہیں کیونکہ ہمارے آلات نفاذ و نادرستی مکمل طور پر صحیح ہوتے ہیں اور ثانیاً وہ جو سوال کے عمل کے دوران میں واقع ہوتی ہیں۔

۱۴۵۔ اگر ہمارے مشاہدات میں کوئی غلطی ہو تو ظاہر ہے کہ بالعموم وہ مقدار بھی جو مشاہدات مذکورہ کی بناء پر محسوب کی گئی ہے غلط ہوگی مثلاً اگر حصہ اول دفعہ ۱۹۸ میں عہ کی پیمائش میں کوئی خفیف سی غلطی وقوع میں آئی ہو تو اس سے لاکھ قیست میں بھی جس کا انحصار صرف اُس دفعہ کے نتیجہ کے بموجب عہ پر ہے غلطی رونما ہوگی۔

۱۴۶۔ کسی طول کی پیمائش میں غلطی کا قابل لحاظ ہونا بالعموم اُس نسبت پر منحصر ہوتا ہے جو غلطی کو طول مذکور کے ساتھ ہو مثلاً کلری کے ایک ٹکڑے کو ناپنے میں جس کا طول قریباً ۶ فٹ ہو ایک اینچ کی غلطی نہایت وقیع اور قابل لحاظ سمجھی جائے گی۔ لیکن گھڑ دوڑ کے ایک میل لمبے راستے کی

پیمائش میں ایک اینچ کی غلطی کو کوئی وقت نہیں دی جاسکتی، اور زمین سے چاند کا فاصلہ ناپنے میں تو ایک اینچ کی غلطی بالکل ناقابل لحاظ ہوگی۔

۴۴۔ ہم یہاں فرض کر لیں گے کہ وہ غلطیاں جن پر ہم بحث کرینگے اتنی چھوٹی ہیں کہ ان کے مربعوں کو (جن کو نیم قطری زاویوں میں ناپنا چاہیے اگر مقادیر مذکورہ زاوے ہوں) نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ہم یہاں ان مقادیر میں غلطی معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کرتے ہیں جو غلط مقادیر کو استعمال کرنے سے حاصل ہوئی ہوں۔

ہم یہاں تسلیم کر لیں گے کہ ہماری جدولیں اور عمل دونوں درست ہیں یعنی ہم عمل کی غلطیوں کو معرض بحث میں نہیں لائیں گے بلکہ صرف ابتدائی مشاہدہ کی اغلاط پر اکتفا کریں گے۔

۱۳۸۔ مشق ۱۔ م ع ایک عمود سی لاٹھ ہے۔ (حصہ اول دفعہ ۴۴ کی شکل ملاحظہ ہو) ایک نقطہ د سے جس کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے ۱ ہے لاٹھ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ط مشاہدہ کیا گیا ہے اور لاٹھ کی بلندی اس پیمائش کی بناء پر محسوب کی گئی ہے۔ اگر ط کے مشاہدہ کرنے میں غلطی ل واقع ہوئی ہو تو معلوم کرو کہ لاٹھ کی بلندی پر اس غلطی سے کیا اثر پڑے گا۔

مربطاً محسوب بلندی ف = ۱ مس ط

اگر مشاہدہ شدہ زاویہ ط اصلی زاویہ سے بقدر ل کے زیادہ ہو تو

اصلی زاویہ ارتفاع = ط - ل اس لئے

اصلی بلندی = ف = ۱ مس (ط - ل)

اس لئے بلندی کی غلطی = ف - ف = ۱ مس ط - ۱ مس (ط - ل)

$$\left\{ \frac{\text{جب } \Delta - \Delta}{\text{جم } \Delta - \Delta} - \frac{\text{جب } \Delta}{\text{جم } \Delta} \right\} = 1$$

$$= \frac{\text{جب } \Delta}{\text{جم } \Delta - \Delta}$$

اگر جم لہ کے مربع اور نیز لہ کی بڑی قوتوں کو نظر انداز کریں تو یہ

$$= 1 \text{ قسط } \Delta \times \Delta$$

لہذا غلطی کو محسوبہ بندی کے ساتھ نسبت

$$\text{لہ قسط } \Delta \div \text{مس } \Delta = \frac{\Delta^2}{\text{جب } \Delta^2} \text{ ہے}$$

چونکہ لہ بہت چھوٹا ہے اس لئے اگر جب ۲ طہ بھی چھوٹا نہ ہو تو یہ نسبت صریحاً بہت چھوٹی ہوگی۔ اور اس کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہوگی جبکہ جب طہ بڑا سے بڑا ہو یعنی طہ ۲ کے برابر ہو یعنی طہ = ۲ لیکن یہ نسبت بڑی ہوگی اگر طہ صفر کے یا ۲ کے قریب ہو۔

پس معلوم ہوا کہ اگر وہ زاویہ جو لاٹھ کے محاذی بنتا ہے صفر کے قریب ہو یا اگر زاویہ مذکورہ ۲ کے قریب ہو تو اس کی پیمائش میں خفیف سی غلطی بھی جو ب میں نسبتاً بہت بڑی غلطی پیدا کرے گی۔

اگر طہ بہت چھوٹا ہو تو محصلہ بندی یعنی مس طہ اور مطلق غلطی عیسینی ۱ قسط ۲ لہ دونوں بہت چھوٹی ہونگی لیکن مؤخر الذکر، اول الذکر کے مقابلہ میں نسبتاً بڑی ہوگی۔

اگر طہ ۹۰ کے قریب ہو تو ہر دو مقادیر بڑی ہونگی۔

مشق ۲۔ دفعہ ۱۹۸ حصہ اول کی طرح ایک برج کی بندی معلوم کی گئی ہے۔ اگر اصلی زاویہ، زاویہ عم سے جو پیمائش سے معلوم ہوا ہے بمقدار طہ کے کم ہو تو

بتاؤ کہ ہمیں محصلہ بلندی میں کیا تبدیلی کرنی پڑے گی۔

چونکہ عہ کی اصلی قیمت عہ - طہ ہے، اس لئے بلندی کی اصلی قیمت معلوم کرنے کے واسطے جواب میں عہ کی بجائے عہ - طہ لکھنا کافی ہوگا۔

$$\text{اس لئے اصلی بلندی} = \frac{\text{جب (عہ - طہ) جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ + طہ)}}$$

$$= \frac{\text{جب عہ جم طہ - جم عہ جب طہ}}{\text{جب (بہ - عہ) (جم طہ + جم بہ - عہ) جب طہ}}$$

$$= \frac{\text{جب عہ جب بہ} \times \frac{1 - \text{طہ مم عہ}}{1 + \text{طہ مم (بہ - عہ)}}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

وفیات ۳۲ اور ۳۳

$$= \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[\frac{1 - \text{طہ مم عہ}}{1 - \text{طہ مم (بہ - عہ) + \dots} \right]$$

$$= \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} \left[1 - \text{طہ} \left\{ \text{مم (بہ - عہ) + مم عہ} \right\} \right]$$

$$= \frac{\text{جب عہ جب بہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}} - \frac{\text{طہ} \times \frac{\text{جب عہ}^2}{\text{جب (بہ - عہ)}}}{\text{جب عہ}^2}$$

اس لئے محصلہ بلندی اصلی بلندی سے بقدر طہ $\frac{\text{جب عہ}^2}{\text{جب (بہ - عہ)}}$ زیادہ ہے۔

نیز غلطی کو محسوب بلندی کے ساتھ نسبت

$$= \frac{\text{طہ جب بہ}}{\text{جب عہ جب (بہ - عہ)}}$$

مشق ۳ - ایک مثلث کے اضلاع ۱ = ۲، ۲ = ۳، ۳ = ۴ اور ج = ۴ سے

مثلث کے زاوے محسوب کئے گئے ہیں۔ اگر یہ معلوم ہو جائے کہ جج کا اصلی طول پیمودہ طول سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کم ہے تو دریافت کرو کہ پیمائش کی اس غلطی کی بناء پر محصلہ زاویوں کی قیمتوں میں کیا غلطی واقع ہوئی ہے۔

انصاع کی مندرجہ بالا قیمتوں سے زوایا کی مثلثی نسبتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{جم } ۱ = \frac{۷}{۸} \quad \text{جم } ۲ = \frac{۱۱}{۱۴} \quad \text{جم } ۳ = \frac{۱۱}{۱۴}$$

$$\text{جب } ۱ = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۱۴} \quad \text{جب } ۲ = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۱۴} \quad \text{جب } ۳ = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۱۴}$$

فرض کرو کہ جج کی قیمت ۴۔ لے کے جواب میں مثلث کے زاویوں کی قیمتیں

۱۔ ط، ۲۔ ب، ۳۔ طم اور جج۔ طم ہیں۔ تب

$$\text{جم } (۱ - ط) = \frac{۲۳ - ۲(۴ - ل) + ۲۳}{۳ \times (۴ - ل) \times ۲} = \frac{۲۱ - ۸ل}{۲۴} = (۱ - \frac{ل}{۴})$$

$$\text{یعنی جم } ۱ + \text{جب } ۱ \times ط = \frac{۱}{۴} [۲۱ - ۸ل] [۱ + \frac{ل}{۴}] = \frac{۱}{۴} [۲۱ - ۸ل]$$

[وفیات ۳۲ اور ۳۳]

$$\text{یعنی } \frac{۷}{۸} + \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۱۴} = \frac{۷}{۸} - \frac{۱۱}{۹۶} ل$$

$$\text{اس لئے ط} = \frac{۱۱\sqrt{۲}}{۱۸} ل \dots\dots\dots (۱)$$

$$\text{نیز جم } (۲ - ط) = \frac{۲۳ - ۲(۴ - ل) + ۲۳}{۳ \times (۴ - ل) \times ۲} = \frac{۲۱ - ۸ل}{۱۶} = (۱ - \frac{ل}{۴})$$

$$\text{یعنی } \frac{۱۱}{۱۴} + \text{جب } ۲ \times ط = \frac{۱}{۱۴} [۲۱ - ۸ل] [۱ + \frac{ل}{۴}] = \frac{۱}{۱۴} [۲۱ - ۸ل]$$

$$\text{یعنی } \frac{۳ \sqrt{۱۵}}{۱۹} - \text{طہ} = \frac{۲۱}{۶۳} - \text{لہ}$$

$$\text{اس لئے طہ} = \frac{۲ \sqrt{۱۵}}{۶۰} - \text{لہ} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{نیز جم (ج - طہ)} = \frac{۲۳ + ۲۲ - ۲(۴ - لہ)}{۳ \times ۲ \times ۲} = \frac{۴۵ - لہ}{۱۲}$$

$$\text{یعنی } - \frac{۱}{۳} + \frac{۲ \sqrt{۱۵}}{۱۹} - \text{طہ} = - \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۶۰} - \text{لہ}$$

$$\text{اس لئے طہ} = \frac{۸ \sqrt{۱۵}}{۳۵} - \text{لہ}$$

لہذا زاویوں 'ا' ب' ج میں اخلاط بالترتیب

$$= \frac{۱۱ \sqrt{۱۵}}{۱۸۰} - \text{لہ} \quad = \frac{۲۱ \sqrt{۱۵}}{۱۸۰} - \text{لہ} \quad \text{اور} \quad = \frac{۳۲ \sqrt{۱۵}}{۱۸۰} - \text{لہ}$$

نیم قطریوں کی ہیں

یعنی سب سے کم غلطی سب سے چھوٹے زاوے میں ہے۔

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ہر سرے زاویا کی غلطیوں کا مجموعہ صفر ہے اور ہونا بھی یہی چاہیئے کیونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ دو قانوں کے برابر ہوتا ہے۔ تیسرے زاویہ کی غلطی ہم اس اصول کی بنا پر بھی معلوم کر سکتے ہیں۔

۲۲ مثلہ

۱۔ ایک ٹیلہ کے اوپر ایک مینار ہے جسکی بلندی ب ہے۔ مینار کی چوٹی اور قاعدہ کے ارتفاعی زاوے بالترتیب عہ اور بہ مشاہدہ کئے گئے ہیں اور اس بنا پر ٹیلہ کی بلندی محسوب کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ زاویہ عہ کی پیمائش میں طہ کی غلطی واقع ہونے سے ٹیلہ کی اصلی بلندی ف میں جو غلطی رونما ہوگی وہ محصلہ بلندی کا

ط \times جہم بہ قطعہ قم (عہ - ہ) گنا ہوگی۔

۲ - ایک نقطہ سے جو مینار کے قاعدہ سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰ مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر زاویہ ارتفاع کی پیمائش میں ا کی غلطی واقع ہوئی ہو اور طول کی پیمائش میں ۶ اینچ کی، تو بتاؤ کہ محصلہ بلندی میں چھوٹی سے چھوٹی اور بڑی سے بڑی غلطیاں کیا پیدا ہو سکتی ہیں۔

۳ - اگر حصہ اول دفعہ ۲۰۲ کی مشق میں زاویہ عہ کی پیمائش میں غلطی لہ واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اس سے مینار اور جھنڈے کی محصلہ بلندیوں میں کیا غلطیاں رونما ہو سکتی ہیں۔ اگر $۱۰۰ = ۱$ فٹ، $۳۰ = ۳$ اور $۱۵ = ۱$ اور عہ کی قیمت میں ا کی غلطی ہو تو مطلوبہ غلطیوں کی عددی قیمتیں معلوم کرو۔

۴ - ا ب ایک عمودی لاٹھ ہے اور ج د ایک ایسا افقی خط ہے کہ ج د محدودہ لاٹھ کے قاعدہ ب میں سے گزرتا ہے، لاٹھ کے محاذی ج اور د پر جو زاوے بنتے ہیں ان کے ماس بالترتیب $\frac{۳}{۴}$ اور $\frac{۳}{۴}$ ہیں۔ اگر ج د کا طول ۳۵ فٹ معلوم ہو تو لاٹھ کی بلندی معلوم کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اگر د پر کے زاویہ ارتفاع کے مشاہدہ میں ا کی غلطی واقع ہو تو اس سے لاٹھ کی محصلہ بلندی میں قریباً ایک اینچ کی غلطی رونما ہوگی۔

۵ - ایک مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ایک مقام ا پر عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اور ایک اور مقام ب پر جو مینار کے قاعدہ اور مقام ا کے ملنے والے افقی خط پر واقع ہے اور جس کا فاصلہ ا سے ج ہے زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے

اس طرح سے مینار کی بلندی $\frac{\text{ج جب عہ جببہ}}{\text{جب (عہ - ہ)}}$ فٹ محسوب کی گئی ہے۔

اگر ا ب، مینار کے قاعدہ اور ا کے ملنے والے خط پر ملتا پڑ جائے بلکہ ایسی

سمت میں ناپا جائے جو متوازی الافق ہو اور موخر الذکر خط کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ ط بنائے تو بتاؤ کہ مینار کی بلندی میں دوسرے مرتبہ کی چھوٹی متاثرہ تک صحت کرنے

کے لئے محسوب بلندی میں سے مقدار بج جم عہ جب ۲۰ = ۲۰/۴ تقریباً کرنی پڑیگی۔
(جم بہ جب (عہ بہ))

۶۔ تین نقاط ۱، ۲، ۳ ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور ایک اور نقطہ ۴ کا فاصلہ ۲ سے اس مشاہدہ کی بنا پر محسوب کیا گیا ہے کہ

$$\angle ۱ د ب = \angle ۲ ب د ج = ط$$

ثابت کرو کہ اگر ط کے مشاہدہ میں ایک چھوٹی غلطی لہ واقع ہو تو اس کی وجہ سے د ب کے محصلہ طول میں تقریباً

$$\frac{۲ - ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ (۱ + ۲) \text{ جب } ط}{۲ (۱ + ۲ - ۳) \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ (۱ + ۲) \text{ جب } ط}$$

کی غلطی واقع ہوگی جہاں ۱ ب = ۱ اور ۲ ب ج = ب

۷۔ ایک مثلث کے تین اضلاع کی پیمائش کرتے وقت دو اضلاع ۱ اور ۲ کے طولوں میں دو چھوٹی غلطیاں بالترتیب لا اور ما واقع ہوئیں، ثابت کرو کہ زاویہ ج میں ۱ - ۲ مم - ۱ - ۲ مم ب کی غلطی واقع ہوگی، نیز بتاؤ کہ باقی زاویوں میں کیا کیا غلطیاں واقع ہوں گی۔

۸۔ ایک مثلث ۱ ب ج میں ذیل کی تقریبی قیمتیں دی گئی ہیں

$$۱ = ۳۶ فٹ، ۲ = ۵۰ فٹ اور ج = ۱۰۰ مس$$

معلوم کرو کہ ۱ کی دی ہوئی قیمت میں کتنی غلطی ج کی محسوب قیمت میں اتنی ہی غلطی پیدا کرے گی جو ج کی پیمائش میں ۵ کی غلطی سے پیدا ہوتی ہے

۹۔ ایک مثلث ذیل کی قیمتوں کی بنا پر حل کیا گیا ہے

ج = ۹۵ ، $\angle = ۶۷$ اور $b = ۲$

ثابت کرو کہ ج کی قیمت میں ۱۰ کی غلطی واقع ہونے سے ب کی محسوب قیمت میں تقریباً ۶۶ و ۱۳ کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۰۔ ایک مثلث کا زاویہ ۱ اور دو اضلاع b اور c معلوم ہیں، اگر زاویہ ۱ کی پیمائش میں ایک چھوٹی غلطی طہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی بنا پر (۱) b کی محصلہ قیمت میں طہ جب b جمع تہ نیم قطریوں کی غلطی واقع ہوگی۔ (۲) \angle کی محصلہ قیمت میں ج جب b طہ کی غلطی واقع ہوگی۔

(۳) اور مثلث مذکور کے محصلہ رقبہ میں اس کے طہ \angle کی غلطی واقع ہوگی۔ ۱۱۔ ایک مثلث کے اضلاع a ، b اور c میں بالترتیب a ، b کی غلطیاں ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان اضلاع کی بنا پر مثلث کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر محسوب کیا جائے تو اس میں

$$\frac{1}{p} \text{ مم } + \text{ مم } b \text{ مم } ج [\text{لا قط } a + \text{ ما قط } b + \text{ ی قط } ج]$$

کی غلطی واقع ہوگی۔

۱۲۔ ایک مثلث کا رقبہ اس کے اضلاع کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، یہ معلوم ہے کہ کسی طول کی پیمائش میں انتہائی غلطی جو اصل کو کم یا زیادہ کر سکتی ہے اصلی طول کی ن گنی ہے جہاں n بہت چھوٹا ہے، ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے اضلاع حسب پیمائش ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ گز ہوں اور n کی بنا پر مثلث مذکور کا رقبہ محسوب کیا جائے تو اس رقبہ میں جس غلطی کے وقوع کا امکان ہے وہ زیادہ سے زیادہ رقبہ محصلہ کی ۱۳۳۳ و ۳۳ گنی ہو سکتی ہے۔

۱۳۔ پیمائش سے معلوم ہوا ہے کہ ایک مثلث کے تینوں اضلاع ایک دوسرے کے تقریباً مساوی ہیں، اگر پیمائش میں غلطی کی بلابیشی کے لحاظ سے ایک فیصد ہو تو ثابت

کر دو کہ بڑی سے بڑی غلطی جو ایک زاویہ کے محسوب کرنے میں واقع ہو سکتی ہے تقریباً ۸۰ ہے۔

۱۴۔ ایک مستوی متساوی الاضلاع مثلث افقی سطح میں واقع ہے، مثلث کے ہر ایک کونے سے ایک پہاڑ کی چوٹی کے ارتفاعی زاوے مشاہدہ کئے گئے ہیں اگر ہر ایک زاویہ نہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

$$\frac{1}{m} \text{ مس عہ}$$

ہے جہاں m متساوی الاضلاع مثلث کا ایک ضلع ہے اگر ج پر کے ارتفاعی زاوے کی پیمائش میں n کی غلطی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑ کی اصلی بلندی

$$\frac{1}{m} \text{ مس عہ} \left[1 + \frac{\text{جب } n}{\text{جب عہ جم عہ}} \right] \text{ ہے}$$

جو طالب علم احصائے تفرقات سے واقف ہے وہ فوراً دیکھ سکتا ہے کہ باب ہذا کی بعض مثالیں محض تفریق کرنے سے زیادہ آسانی سے حل ہو سکتی ہیں مثلاً دفعہ ۱۴ کی مشق ۲ میں مینار کی بلندی لا

$$= \frac{\text{ا جب عہ جب یہ}}{\text{جب (بہ - عہ)}}$$

اگر بہ مستقل ہو اور عہ بدلے تو تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر عہ}} = \frac{\text{ا جب یہ}}{\text{جم عہ جب (بہ - عہ) + جب عہ جم (بہ - عہ)}}$$

$$\therefore \text{مف لا} = \frac{\text{ا جب یہ}}{\text{جب (بہ - عہ) مف عہ}}$$

جس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ عہ میں خفیف تبدیلی مف عہ واقع ہونے سے لا میں

ایک خفیف تبدیلی مع لا پیدا ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اشلہ ۲۲ مشق ۶ میں

$$\text{جم ج} = \frac{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲}{۲ \text{ا} \text{ب}}$$

لیکن چونکہ ج مستقل ہے اسلئے تفرق کرنے سے

$$\text{ج ب مع ج} = \frac{۲ \text{ا} \text{مع ا} + ۲ \text{ب} \text{مع ب} - \text{ا} \text{ب} - (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{ج}^۲)}{۲ \text{ا} \text{ب}}$$

$$= \frac{\text{ب} - ۲ \text{ا} \text{ج} + \text{جم ب} - \text{ا} \text{مع ا} + ۲ \text{ب} \text{مع ب} - \text{ج} \text{مع ج}}{۲ \text{ا} \text{ب}}$$

$$\therefore \text{مع ج} = - \frac{\text{ا} \text{ج} \text{جم ب}}{\text{ا} \text{ب} \text{ج ب ج}} - \frac{\text{ا} \text{مع ب}}{\text{ا} \text{ب} \text{ج ب ج}}$$

$$= - \frac{\text{ا} \text{مع ب}}{\text{ا} \text{ب} \text{ج ب ج}} - \frac{\text{ا} \text{مع ب}}{\text{ا} \text{ب} \text{ج ب ج}}$$



باب دوازدہم

متفرق مسائل

مساوات درجہ سوم کا حل

۱۴۹۔ مساوات درجہ سوم کی معیاری شکل یہ ہے

$$۳ا + ۲ب + ۳ج = ۰$$

اس میں ماکہ بجائے لا۔ ا رکھنے سے یہ مساوات

$$۳(۲-۲ا) + ۳(۳-۳ا) + ۳(۳-۳ا) = ۰ \text{ ہو جاتی ہے}$$

یعنی ہو جاتی ہے $۳(۲-۲ا) + ۳(۳-۳ا) + ۳(۳-۳ا) = ۰$ (۱)

گویا ہم درجہ سوم کی کسی مساوات کو مساوات (۱) کی شکل میں یعنی ایسی شکل میں جس میں لا کی کوئی رقم نہ ہو تحویل کر سکتے ہیں۔

$$۱۵۰۔ مساوات (۱) ۳ف + لا + ق = ۰ کا حل$$

اس میں لا = $\frac{۳}{۲}$ رکھنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$۳(۳-۳ا) + ۳(۳-۳ا) + ۳(۳-۳ا) = ۰ \text{ (۲)}$$

اب دفعہ ۱۰۴ کی روش سے ہمیشہ

$$۳ج = ۳ط = ۳ج = ۳ط = ۳ج = ۳ط$$

اس لئے $۳ج = ۳ط = ۳ج = ۳ط = ۳ج = ۳ط = ۳ج = ۳ط$ (۳)

ظاہر ہے کہ مساوات (۲) اور (۳) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہیں

بشرطیکہ $سی = جم ط$ ۳ ف ۲ = $\frac{۳}{۲}$ اور $جم ط = ق ن$ ۳ = $\frac{۱}{۲}$ اسلئے $ن = (\frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲})$

اور اسلئے $جم ط = ۳ - ۴ ق (\frac{۱}{۲})$ (۴)

مساوات (۴) ہمیشہ (بشرط ضرورت جداول کی مدد سے) حل ہو سکتی

ہے اگر ف مثبت ہو اور $۴ ق (\frac{۱}{۲}) > ۳$ یعنی اگر $۴ ق > ۳$

[جو طالب علم نظریہ مساوات سے واقف ہے اس سے مخفی نہیں کہ یہ وہ صورت ہے جو کارؤن کے طریقہ سے حل نہیں ہو سکتی یعنی وہ صورت ہے جس میں کہ مساوات کی تینوں

اصلیں حقیقی ہوں]

اگر چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو مساوات (۴) کو پورا کرے ط ہو تو مقادیر $\frac{۲۲}{۳}$ اور ط + $\frac{۳۴}{۳}$ بھی مساوات مذکورہ کو پورا کر سکیں گویا مساوات $۳ - ۲ ف لا + ق = ۰$

کی اسلئے $\frac{۱}{۲} جم ط$ ۲ = $\frac{۱}{۲} جم$ (ط + $\frac{۳۲}{۳}$) اور $\frac{۱}{۲} جم$ (ط + $\frac{۳۴}{۳}$) یعنی ۲ ف لا جم ط ، ۲ ف لا جم (ط + $\frac{۳۲}{۳}$) اور ۲ ف لا جم (ط + $\frac{۳۴}{۳}$) ہوگی۔

۱۵۱- مشق - مساوات $۱۶ لا + ۹ لا + ۳ = ۰$ کو حل کرو۔

لا = ۲ - رکھنے سے مساوات بالا حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$۱۶ - ۳ = ۱ + ۳ = ۰$$

اب اگر $۱۶ = ۱$ رکھا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$۱۶ - ۳ = ۱ + ۳ = ۰ \dots \dots (۱)$$

اور حجم ۳ طہ - ۳/۴ حجم طہ - ۱/۴ حجم ۳ طہ = ۰ (۲)

(۱) اور (۲) دونوں دراصل ایک ہی مساوات ہونگی اگر

ی = حجم طہ، ن = ۱/۴ اور - ۱/۴ حجم ۳ طہ = ن

یعنی اگر ن = ۱/۴

اور حجم ۳ طہ = - ۱/۴ = حجم ۱۲۰ (۳)

مساوات (۳) کی اصلیں صریحاً حسب ذیل ہیں

$$۰۲۴۰ + ۳۰۰ + ۱۲۰ + ۴۰ = ۰$$

اسلئے ی = حجم ۴۰ یا حجم ۱۶۰ یا حجم ۲۸۰

یا ۲ = حجم ۴۰ یا ۲ = حجم ۱۶۰ یا ۲ = حجم ۲۸۰

∴ لا = ۲ - ۲ = ۰ یا ۲ + ۲ = ۴۰ یا ۲ - ۲ = ۰ یا ۲ + ۲ = ۸۰

لا کی عددی قیمتیں جہدوں کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔

۲۳۰ مثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$(۱) ۲ لا - ۳ لا - ۱ = ۰ \quad (۲) لا + ۳ لا - ۱ = ۰$$

$$(۳) لا - ۳ لا - ۳۲ = ۰ \quad (۴) لا - ۶ لا + ۶ لا + ۸ = ۰$$

$$(۵) لا - ۲ لا + ۴ = ۰ \quad (۶) لا + ۴ لا + ۲ لا - ۱ = ۰$$

$$(۷) لا - ۴ لا + ۵ = ۰$$

اعظم اور اقل قیمتیں

۱۵۲ - ایک مثلثی جلد کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرنے کی ایک مثال

حصہ اول دفعہ ۱۳۹ میں درج کی گئی ہے۔ اس جگہ ہم ایک اور مثال حل کر رہے ہیں۔

اگر دو مثبت زادے لا اور ما ایسے ہوں کہ ان کا حاصل جمع ایک مستقل زاویہ $(\angle ۲)$ کے برابر ہو تو بتاؤ کہ جب لا جب ما کی ہی سے بڑی قیمت کب ہوگی، نیز یہ مسئلہ دو سے زیادہ زاویوں کی صورت میں کیا ہو جائے گا۔
ظاہر ہے کہ ۲ جب لا جب ما $= ۲$ جب لا جب (عہ - لا)

$$= \text{جم (عہ - } ۲ \text{ لا) - جم عہ}$$

۱۔ سلسلے ۲ جب لا جب ما کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب

جم (عہ - لا) بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر $عہ = ۲ لا$

$$\text{اس لئے } لا = ما = \frac{عہ}{۲}$$

اس لئے حاصل ضرب مذکورہ بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا جب زاویے

لا اور ما باہم مساوی ہوں۔

اب فرض کرو کہ تین زاویے لا، ما، می ایسے ہیں کہ ان کا مجموعہ ایک

مستقل زاویہ $(\angle ۲ = \angle ۲)$ کے مساوی ہے۔ اگر حاصل ضرب

جب لا جب ما جب می

کے زاویوں میں سے کوئی دو زادے مثلاً لا اور ما باہم مساوی نہ ہوں تو

ظاہر ہے کہ اگر ہم لا اور ما دونوں کی بجائے ان کے حاصل جمع کا نصف

لکھیں تو زاویوں کے حاصل جمع میں تو کوئی فرق نہ آئیگا لیکن حاصل ضرب

مذکورہ کی قیمت بڑھ جائے گی۔ اس لئے جب تک زاویے لا، ما اور می

آپس میں برابر نہ ہو جائیں ہم ہمیشہ زاویوں کو بتدریج ایک دوسرے کے مساوی

کرنے سے محل ضرب مذکور کی قیمت بڑھا سکتے ہیں۔ پس بڑی سے بڑی قیمت

اس وقت حاصل ہوگی جب لا، ما اور سی آپس میں برابر ہونگے۔
 زدوایا لا، ما اور سی..... کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو صریحاً اسی قسم کا مثلث
 صادق آئے گا۔

۱۵۳۔ اب ہم بتا سکتے ہیں کہ بڑے سے بڑے رقبہ کا مثلث جو ایک دائرہ
 کے اندر بنایا جاسکتا ہے مثلث متساوی الاضلاع ہے۔ اگر دائرہ کا نصف
 قطر سا ہو تو حصہ اول، امثلہ ۳۶ مشق ۱۰ کے بموجب مثلث کا رقبہ

$$= ۲ \text{ ر } \text{جب} \text{ ا } \text{جب} \text{ ب } \text{جب} \text{ ج}$$

ہوگا جہاں $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۲۱۲ =$ ایک مستقل زاویہ

دفعہ ۱ قبل کی رد سے ظاہر ہے کہ یہ مثلث بڑے سے بڑا اس وقت ہوگا

$$\text{جب} \text{ ا } = \text{ب} = \text{ج}$$

۱۵۴۔ مشق۔ مقدار $\text{ا}^۲$ مس $\text{لا} + \text{ب}^۲$ مم لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت
 قیمت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $\text{ا}^۲$ مس $\text{لا} + \text{ب}^۲$ مم $\text{لا} =$

یعنی $\text{ا}^۲$ مس $\text{لا} - \text{ا}^۲$ مس $\text{لا} + \text{ب}^۲ =$

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\text{مس لا} = \frac{\text{ا}^۲ \pm \text{ا}^۲ \text{ا} - \text{ا}^۲ \text{ب}^۲}{۲}$$

۲۱۲

چونکہ مس لا حقیقی ہے اسلئے علامتہ جذر کے اندر جو مقدار ہے وہ

مثبت ہونی چاہئے یعنی ضرور ہے کہ $\text{ا}^۲$ ک $\text{ا}^۲$ ب

اس لئے $\text{ا}^۲$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\text{ا}^۲$ ب ہے اور اس قیمت کے

جواب میں مس لا کی قیمت $\frac{\text{ا}^۲}{۲}$ ہے۔

امثلہ ۲

۱۔ اگر لا + ما ایک دیا ہوا زاویہ ہو جو $\frac{\pi}{2}$ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جب لا + جب ما (۲) جم لا جم ما

دو نوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

۲۔ اگر لا + ما = ایک دیا ہوا زاویہ $\frac{\pi}{2} >$ تو ثابت کرو کہ

جم لا + جم ما اور جم لا + جم ما

دونوں کی بڑی سے بڑی قیمتیں اس وقت ہونگی جب لا = ما

مندرجہ ذیل رقوم کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

$$۳۔ \frac{۲ \text{ جم ط} + \frac{۳}{۳} \text{ ما ط}}{\frac{۳}{۳} \text{ جم ط}} - ۴۔ \text{ا قط ط} - \text{ب مس ط}$$

$$۵۔ \frac{\text{ق م ط} - \text{م م ط}}{\text{ق م ط} + \text{م م ط}} - ۶۔ \text{ا جب ط} + \text{ب م ط} - \text{ق م ط}$$

$$۷۔ \text{ا قط ط} + \text{ب م ط} - \text{ق م ط}$$

اگر لا + ما کی قیمت ہمیشہ ایک دے ہوئے زاویہ $\frac{\pi}{2}$ کے مساوی ہو جہاں

$\frac{\pi}{2}$ سے کم ہے $\frac{\pi}{2}$ سے تو ذیل کے جموں کی کم سے کم قیمتیں دریافت کرو

$$۸۔ \text{مس لا + مس ما} - ۹۔ \text{قط لا + قط ما}$$

ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\left[\frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{جم (ع) - لا}} + \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{جم (ع) - لا}} \right] \text{ جب ع}$$

۱۰۔ اگر لا + ما = ع جہاں $\frac{\pi}{2} >$ تو معلوم کرو کہ مس لا مس ما کی

قیمت بڑی سے بڑی کب ہوگی۔

$$[۱۔ مس لا مس ا = \frac{۲ جم ب}{۲ جم د - ۲ لا}]$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا مثلث جسکے اضلاع کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار کے برابر ہو مساوی الاضلاع ہوتا ہے۔

[ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایک مثلث کا رقبہ = $\frac{۱}{۲}$ مس پ مس ج [جہاں پ نصف محیط ۱۲۔ اگر لا، ما، ی ایسے زاوے ہوں جنکا حاصل جمع ایک دئے ہوئے زاویہ کے مساوی ہو اور نیزان زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ مثبت ہو اور زاویہ قائمہ سے کم ہو تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب جم لا جم ما جم ی کی قیمت بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب سب زاوے باہم مساوی ہوں۔

۱۳۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ مقادیر جب ا + جب ب + جب ج اور جب ا جب ب جب ج کی قیمتیں بڑی سے بڑی اس وقت ہوگی جب مثلث مساوی الاضلاع ہو۔

۱۴۔ ایک سادہ الزایا مثلث کا مثلث بائیں کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث بائیں کا رقبہ اول الذکر مثلث کے رقبہ کے ایک چوتھائی سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔

۱۵۔ ا ب ج ایک مثلث ہے ثابت کرو کہ مقدار

$$جم ا + جم ب + جم ج$$

کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت - ۳ ہے، نیز ثابت کرو کہ جم ا + جم ب + جم ج ہمیشہ ایک سے بڑا ہوگا اور ۳ سے بڑا نہیں ہوگا۔

۱۶۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو تو ثابت کرو کہ ہر دو مقادیر

$$مم ا + مم ب + مم ج$$

اور $م^2 + م^2 ب + م^2 ج$
 کی قیمتیں چھوٹی سے چھوٹی اس وقت ہونگی جبکہ مثلث مذکور مساوی الاضلاع ہو۔

مقادیر ملحق کی ہندی تعمیر

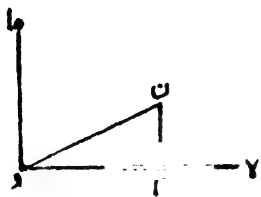
۱۵۵۔ حصہ اول باب چہارم میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر کوئی فاصلہ کسی خاص سمت میں (مثلاً افق کے متوازی دائیں جانب) ناپا جائے اور اس فاصلہ کو اسے تعمیر کیا جائے تو اتنا ہی فاصلہ جو اول الذکر سمت کی مقابل سمت میں (یعنی افق کے متوازی بائیں جانب) ناپا جائے گا وہ اس سے تعمیر ہوگا۔

اس لئے $ل$ کے قبل منفی علامت (-) مثبت کرنیکا وہی نتیجہ ہوتا ہے گویا $ل$ (ملاحظہ ہو حصہ اول دفعہ ۵۳ کی شکل) کو مثبت سمت میں دو قائموں میں سے گھما دیا گیا ہے گویا $ل$ پر (۱-) کا عمل عائد کرنے کے یہ معنی ہیں کہ $ل$ کو دو قائموں میں سے مثبت سمت میں گھمایا گیا ہے۔

۱۵۶۔ اب $ل = م \times م - ۱$ اس لئے عمل $ل - ۱$ کے لئے جو معنی بھی تجویز کئے جائیں وہ ایسے ہونے چاہئیں کہ کسی مقدار پر یہ عمل دو دفعہ کرنے سے وہی نتیجہ مترتب ہو جو اسی مقدار پر $ل - ۱$ کا عمل ایک دفعہ کرنے سے مترتب ہوتا ہے۔

پس ہم عمل $ل - ۱$ سے یہ دے سکتے ہیں کہ یہ کسی طول کو ایک زاویہ قائمہ میں سے (بسمت مثبت) گھما دیتا ہے۔ اس لئے کسی طول $ل$ پر $ل - ۱$ کا عمل دو دفعہ کرنے کے یہ معنی ہونگے کہ اس طول $ل$ کو بسمت مثبت دو قائموں میں سے گھمایا گیا ہے۔ لہذا ان معنوں کے مطابق $ل - ۱$ سے ایک خط دراد ہے

جواش خط پر عود ہے جو α سے تعبیر ہوتا ہے۔



۱۵۷۔ اب ہم یہ بتا سکتے ہیں کہ

مقدار $\alpha + \alpha - \alpha$ سے کیا مراد ہے

دو خط α اور α کھینچو جو ایک

دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں، α و

پراپک فاصلہ $\alpha = \alpha$ (پراپ) α سے α ، α کے متوازی کھینچو اور

اس کو α کے مساوی بناؤ۔ تب α ، $\alpha - \alpha$ کو تعبیر کرتا ہے، پس

مقدار $\alpha + \alpha - \alpha$ کو یا نقطہ α سے تعبیر ہوتی ہے۔

یا ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ خط α اس ملتف مقدار کو تعبیر کرتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\alpha = \alpha + \alpha - \alpha = \alpha + \alpha - \alpha$

اور $\alpha = \alpha - \alpha = \alpha - \alpha = \alpha - \alpha$

لہذا طول α ، مقدار α کے مقیاس کو تعبیر کرتا ہے اور زاویہ

α و α مقدار مذکور کے اہتزاز کی قیمت خاص کو (دفعہ ۱۸) تعبیر کرتا ہے۔

۱۵۸۔ دو ملتف مقداروں کو جمع کرنا

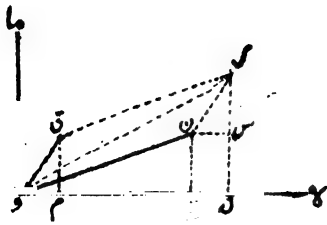
فرض کرو کہ α و α مقدار α و α

کو تعبیر کرتا ہے اور α و α α و α

کو یعنی $\alpha = \alpha$ ، $\alpha = \alpha$

$\alpha = \alpha$ اور $\alpha = \alpha$

متوازی الاضلاع α و α



کی تکمیل کرو، ولا پر عمود سال اور سال پر عمود ن س کھینچو۔

چونکہ ن س، دق کے مساوی اور متوازی ہے

اس لئے غل = ن س = وم اور س س = م ق

لہذا ول = وع + غل = لا + ی

اور ل س = ل س + س س = ما + سے

اسلئے وس، مقدار ملتف

لا + ی + خ (ما + سے) کو تعبیر کرتا ہے۔

اسلئے دو ملتف مقداروں کا مجموعہ اُس متوازی الاضلاع کو قطر سے تعبیر ہوتا ہے

جس کے دو متصل اضلاع مذکورہ مقدار کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط) بموجب دفعہ ۱۸

تب (جم عم + خ جب عم) (لا + خ ما)

= ر (جم عم + خ جب عم) (جم ط + خ جب ط)

= ر [جم عم + خ جب عم] (۱)

اب ان معنوں کے بموجب جو ملتف مقدار کے لئے اوپر تجویز کئے جا چکے

ہیں

ر [جم ط + خ جب ط]

سے مراد ایک ایسا خط ہے جس کا طول رہے اور جو ولا سے زاویہ ط بنا آئے

نیز حسب ر [جم عم + ط] + خ جب عم + ط [

سے مراد ر طول کا ایک خط ہے جو ولا سے زاویہ عم + ط، بنا آئے (دفعہ ۱۵۷)

اسلئے مساوات (۱) کی رو سے لا + خ ما کو جم عم + خ جب عم سے

ضرب دینے کے گویا یہ معنی ہیں کہ اس خط کو جو 90° زاویہ سے گھما دیا گیا ہے۔

۱۶۰۔ ڈی مائیر سے کے مسئلہ کی ہندسی تعبیر

مقدار (حجم عم + خ جب عم) (حجم ب + خ جب ب) (حجم ل + خ جب ل) سے یہ مادہ ہے کہ ایک خط کو جو حجم ل + خ جب ل سے تعبیر ہو پہلے زاویہ جہ پھر زاویہ بہ اور بالآخر زاویہ عم میں سے گھمایا گیا ہے۔ یعنی فی الجملہ زاویہ عم + بہ + جہ میں سے گھمایا گیا ہے۔ لیکن اس موخر الذکر محبوبی عمل سے جو خط حاصل ہوگا وہ وہی ہوگا جو

[عجم (ع + ج) + سنجب (ع + ج + ج)] [عجم (ع + ج + ج) + سنجب (ع + ج + ج)]

یہی استدلال زدایا کی کسی تعداد پر صادق آئیگا۔ اسلئے ڈی مائیر سے
کا مسئلہ جبریہ طرز میں محض اس ہندسی امر واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ ایک خط کو
سیکے بعد دیگرے مختلف زاویوں میں سے گردش دینے سے وہی نتیجہ حاصل
ہوتا ہے جو اس خط کو ایک دم اُن زاویوں کے مجموعہ میں سے گردش
دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مشق یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ عدد ۱ کے تین جذور الکعب حسب ذیل ہیں

$$\text{ج ۰} + \text{خ ج ۰} = \text{ج ۰} + \frac{22}{3} + \text{خ ج ۰} + \frac{22}{3} = \text{ج ۰} + \text{خ ج ۰} + \frac{44}{3}$$

$$(\text{ج ۰} + \text{خ ج ۰}) (\text{ج ۰} + \text{خ ج ۰}) (\text{ج ۰} + \text{خ ج ۰}) = 1$$
$$= \left(\frac{112}{3} + \frac{112}{3} \right) \left(\frac{112}{3} + \frac{112}{3} \right) = \left(\frac{224}{3} \right) \left(\frac{224}{3} \right) = \frac{50176}{9}$$

اور جم $(\frac{۲۴}{۳۳} + \frac{۲۴}{۳۳})$ (جم $\frac{۲۴}{۳۳} +$ خ جب $\frac{۲۴}{۳۳}$) (جم $\frac{۲۴}{۳۳} +$ خ جب $\frac{۲۴}{۳۳}$) = ۱
 ان ساداتوں میں سے پہلی مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو تین بار زاویہ
 زاویہ میں سے گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔
 دوسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ $\frac{۲۴}{۳۳}$ میں
 سے (یعنی فی الجملہ زاویہ $\frac{۲۴}{۳۳}$ میں سے) گردش دینے سے وہی خط حاصل ہوتا ہے۔
 تیسری مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی خط کو مسلسل تین بار زاویہ $\frac{۲۴}{۳۳}$
 میں سے (یعنی فی الجملہ $\frac{۲۴}{۳۳}$ میں سے) گردش دینے سے وہی ابتدائی خط حاصل
 ہوتا ہے۔

یہ سب امور صریحاً درست ہیں۔

۱۶۱۔ دو ملقف مقداروں کو ضرب دینا

اگر لا + خ ما = ر (جم طہ + خ جب طہ)
 اور ی + خ عے = س (جم فہ + خ جب فہ)
 تو (لا + خ ما) (ی + خ عے) = ر س (جم طہ + خ جب طہ) (جم فہ + خ جب فہ)
 = ر س [جم (طہ + فہ) + خ جب (طہ + فہ)]

پس ایک ملقف مقدار لا + خ ما کو دوسری ملقف مقدار ی + خ عے
 سے ضرب دینے کے ہندی معنی یہ ہیں کہ اس خط کو جو لا + خ ما سے تعبیر
 ہوتا ہے زاویہ فہ

[یعنی مس - ا - جی]

میں سونگھایا گیا ہے اور اس کے طول کو نسبت

۷۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & \text{جب } n \text{ حجم } n \text{ فہ} + n \text{ جب } n-1 \text{ فہ حجم } (n-1) \text{ طہ جب } (n-1) \text{ فہ} \\ & + \frac{n(n-1)}{2} \text{ جب } n-2 \text{ فہ حجم } (n-2) \text{ طہ جب } (n-2) \text{ فہ} + \dots + \text{جب } n \text{ فہ} \\ & = \text{جب } n \text{ طہ حجم } n \text{ فہ} \end{aligned}$$

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\begin{aligned} & \text{لا } n \text{ جب } n \text{ طہ} - n \text{ لا } n-1 \text{ جب } (n-1) \text{ طہ} + n \text{ فہ} \\ & + \frac{n(n-1)}{2} \text{ لا } n-2 \text{ جب } (n-2) \text{ طہ} + n \text{ فہ} - \dots - n \text{ تا } (n+1) \text{ رقوم} = 0 \\ & \text{کی اہلیں مساوات لا } = \text{جب } (n-1) \text{ فہ} - \text{ک } \left(\frac{n}{2} \right) \text{ قم } (n-1) \text{ ک } \left(\frac{n}{2} \right) \\ & \text{سے حاصل ہوتی ہیں جہاں } n \text{ سے مراد کوئی صحیح عدد ہے اور ک کی قیمت} \\ & \text{صفر سے } n-1 \text{ تک کوئی صحیح عدد ہے۔} \\ & ۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ لا متناہی$$

$$\text{جب } n \text{ طہ} + \frac{1}{n} \text{ جب } n-1 \text{ طہ} + \frac{3 \times 1}{3 \times 2} \text{ جب } n-2 \text{ طہ} + \dots + \frac{1}{n}$$

کی قیمت طہ کے مساوی ہے جہاں طہ کوئی حادہ زاویہ ہے، اور بالعموم اگر ن کا انتخاب اس طرح کیا جائے کہ مقدار ن + (۱ - ن) طہ کی قیمت - $\frac{n}{2}$ اور $\frac{n}{2}$ کے درمیان ہو تو سلسلہ بالا کی قیمت ن + (۱ - ن) طہ ہوگی۔

۱۰۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا نصف قطر ایک ہے اور اس دائرہ کے محیط کو ن مساوی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ان قوسوں کے وتروں پر قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں جن کے راس باہر کی جانب ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان مثلثوں کی تعداد کو لا انتہا بڑا دیا جائے تو

ان راسوں کے جو فاصلے دائرہ کے مرکز سے ہوں گے ان سب کے حاصل ضرب کی انتہا $\sqrt{2}$ ہوگی جہاں سے مراد وہ زاویہ ہے جو قوس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے اندر جبکہ نصف قطر Δ ہے ان اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے، دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ Q سے دائرہ کا مماس کھینچا گیا ہے اور کثیر الاضلاع کے اضلاع اس مماس کو نقاط A, B, C, D, \dots پر ملے ہیں ثبات کرو کہ حاصل ضرب $QA \times QB \times QC \times QD \times \dots = \Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta \times \dots$ اگر n طاق ہو اور $\Delta \times \Delta \times \Delta \times \Delta \times \dots$ اگر n جفت ہو، اس میں Δ سے مراد وہ زاویہ ہے جو Q اور کثیر الاضلاع کے ایک راس کے خط وصل کے محاذی دائرہ کے محیط پر بنتا ہے۔

۱۲۔ ایک دائرہ کے محیط پر کوئی نقطہ Q ہے۔ دائرہ کے اندر ان اضلاع کا ایک منظم کثیر الاضلاع $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ بنایا گیا ہے جہاں راس Δ_1 وہ نقطہ ہے جو نقطہ Q کے قریب ترین ہے۔ اگر وتر $Q\Delta_1, Q\Delta_2, Q\Delta_3, \dots, Q\Delta_n$ کے طول بالترتیب $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$ ہوں تو ثبات کرو کہ مقدار $J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n = n \times \Delta$ کی قیمت Q کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔

۱۳۔ ایک دائرہ کے نصف قطروں کا ایک سلسلہ دائرہ کے محیط کو $2n$ مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے اور محیط پر کے کسی دئے ہوئے نقطہ سے n سلسلہ نصف قطروں پر عمود کھینچے گئے ہیں ثبات کرو کہ ان n عمودوں کا حاصل ضرب $\frac{n!}{2^n} \times \Delta^n$ جب n طاق ہو اور $\frac{n!}{2^{n-1}} \times \Delta^{n-1}$ جب n جفت ہو۔

ہوگا جہاں Δ دائرہ مذکور کا نصف قطر ہے اور Δ ان دو نصف قطروں کا درمیانی زاویہ ہے جن میں سے ایک تو محیط پر کے دئے ہوئے نقطہ کو مرکز سے وصل کرتا ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ تالافتاہی

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \dots = \frac{1}{2}$$

۲۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\left[\frac{1}{2(1+3)} + \frac{1}{4(1+3)} + \frac{1}{8(1+3)} + \dots \right]$$

کا حاصل جمع $1 - \frac{1}{2}$ ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$اور \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

۲۳۔ اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ تو ثابت کرو کہ حلات

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$اور \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

کی قیمتیں بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$$+ \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{2}$$

۲۵۔ ثابت کرو کہ جس مساوات کی اصلیں $\frac{1}{2}$ ہیں (جہاں رتبہ

۱ کے کوئی عدد ہے جو ۱۵ سے کم ہے اور لمباظ ۱۵ کے مفرد ہے) وہ یہ ہے

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = 0$$

۲۶۔ سلسلہ جب ۲ طہ $\frac{1}{2}$ جب ۴ طہ $\frac{1}{4}$ جب ۶ طہ $\frac{1}{6}$ تالافتاہی

ثابت کرو کہ

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n} = \frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n-1}} + \dots + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_n - r_{n-1}} + \frac{1}{r_{n-1} - r_{n-2}} + \dots + \frac{1}{r_1 - r_0}$$

جہاں r_n اکثر الاضلاع کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، r_{n-1} اس دائرہ کے مرکز اور r_n کے مابین فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے اور r_0 سے مراد وہ زاویہ ہے جو خط ON کسی زاویہ کے رأس اور مرکز کو ملانے والے خط سے بناتا ہے۔

۳۲۔ اگر $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} = \dots = r_1$ تو ثابت کرو کہ

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + \dots + r_1 = 2^n - 1$$

اس سے ان چھ خطوط کے طولوں کا باہمی ربط مستنبط کرو جو چار ہم سطح نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتے ہیں۔



مرید متفرق مثالیں

۱۔ اگر $(1+x)$ ، $(1+x^2)$ ، $(1+x^4)$ ، $(1+x^8)$ ، $(1+x^{16})$ ، $(1+x^{32})$ ، $(1+x^{64})$ ، $(1+x^{128})$ ، $(1+x^{256})$ ، $(1+x^{512})$ ، $(1+x^{1024})$ ، $(1+x^{2048})$ ، $(1+x^{4096})$ ، $(1+x^{8192})$ ، $(1+x^{16384})$ ، $(1+x^{32768})$ ، $(1+x^{65536})$ ، $(1+x^{131072})$ ، $(1+x^{262144})$ ، $(1+x^{524288})$ ، $(1+x^{1048576})$ ، $(1+x^{2097152})$ ، $(1+x^{4194304})$ ، $(1+x^{8388608})$ ، $(1+x^{16777216})$ ، $(1+x^{33554432})$ ، $(1+x^{67108864})$ ، $(1+x^{134217728})$ ، $(1+x^{268435456})$ ، $(1+x^{536870912})$ ، $(1+x^{1073741824})$ ، $(1+x^{2147483648})$ ، $(1+x^{4294967296})$ ، $(1+x^{8589934592})$ ، $(1+x^{17179869184})$ ، $(1+x^{34359738368})$ ، $(1+x^{68719476736})$ ، $(1+x^{137438953472})$ ، $(1+x^{274877906944})$ ، $(1+x^{549755813888})$ ، $(1+x^{1099511627776})$ ، $(1+x^{2199023255552})$ ، $(1+x^{4398046511104})$ ، $(1+x^{8796093022208})$ ، $(1+x^{17592186044416})$ ، $(1+x^{35184372088832})$ ، $(1+x^{70368744177664})$ ، $(1+x^{140737488355328})$ ، $(1+x^{281474976710656})$ ، $(1+x^{562949953421312})$ ، $(1+x^{1125899906842624})$ ، $(1+x^{2251799813685248})$ ، $(1+x^{4503599627370496})$ ، $(1+x^{9007199254740992})$ ، $(1+x^{18014398509481984})$ ، $(1+x^{36028797018963968})$ ، $(1+x^{72057594037927936})$ ، $(1+x^{144115188075855872})$ ، $(1+x^{288230376151711744})$ ، $(1+x^{576460752303423488})$ ، $(1+x^{1152921504606846976})$ ، $(1+x^{2305843009213693952})$ ، $(1+x^{4611686018427387904})$ ، $(1+x^{9223372036854775808})$ ، $(1+x^{18446744073709551616})$ ، $(1+x^{36893488147419103232})$ ، $(1+x^{73786976294838206464})$ ، $(1+x^{147573952589676412928})$ ، $(1+x^{295147905179352825856})$ ، $(1+x^{590295810358705651712})$ ، $(1+x^{1180591620717411303424})$ ، $(1+x^{2361183241434822606848})$ ، $(1+x^{4722366482869645213696})$ ، $(1+x^{9444732965739290427392})$ ، $(1+x^{18889465931478580854784})$ ، $(1+x^{37778931862957161709568})$ ، $(1+x^{75557863725914323419136})$ ، $(1+x^{151115727451828646838272})$ ، $(1+x^{302231454903657293676544})$ ، $(1+x^{604462909807314587353088})$ ، $(1+x^{1208925819614629174706176})$ ، $(1+x^{2417851639229258349412352})$ ، $(1+x^{4835703278458516698824704})$ ، $(1+x^{9671406556917033397649408})$ ، $(1+x^{19342813113834066795298816})$ ، $(1+x^{38685626227668133590597632})$ ، $(1+x^{77371252455336267181195264})$ ، $(1+x^{154742504910672534362390528})$ ، $(1+x^{309485009821345068724781056})$ ، $(1+x^{618970019642690137449562112})$ ، $(1+x^{1237940039285380274899124224})$ ، $(1+x^{2475880078570760549798248448})$ ، $(1+x^{4951760157141521099596496896})$ ، $(1+x^{9903520314283042199192993792})$ ، $(1+x^{19807040628566084398385987584})$ ، $(1+x^{39614081257132168796771975168})$ ، $(1+x^{79228162514264337593543950336})$ ، $(1+x^{158456325028528675187087900672})$ ، $(1+x^{316912650057057350374175801344})$ ، $(1+x^{633825300114114700748351602688})$ ، $(1+x^{1267650600228229401496703205376})$ ، $(1+x^{2535301200456458802993406410752})$ ، $(1+x^{5070602400912917605986812821504})$ ، $(1+x^{10141204801825835211973625643008})$ ، $(1+x^{20282409603651670423947251286016})$ ، $(1+x^{40564819207303340847894502572032})$ ، $(1+x^{81129638414606681695789005144064})$ ، $(1+x^{162259276829213363391578010288128})$ ، $(1+x^{324518553658426726783156020576256})$ ، $(1+x^{649037107316853453566312041152512})$ ، $(1+x^{1298074214633706907132624082305024})$ ، $(1+x^{2596148429267413814265248164610048})$ ، $(1+x^{5192296858534827628530496329220096})$ ، $(1+x^{10384593717069655257060992658440192})$ ، $(1+x^{20769187434139310514121985316880384})$ ، $(1+x^{41538374868278621028243970633760768})$ ، $(1+x^{83076749736557242056487941267521536})$ ، $(1+x^{166153499473114484112975882535043072})$ ، $(1+x^{332306998946228968225951765070086144})$ ، $(1+x^{664613997892457936451903530140172288})$ ، $(1+x^{1329227995784915872903807060280344576})$ ، $(1+x^{2658455991569831745807614120560689152})$ ، $(1+x^{5316911983139663491615228241121378304})$ ، $(1+x^{10633823966279326983230456482242756608})$ ، $(1+x^{21267647932558653966460912964485513216})$ ، $(1+x^{42535295865117307932921825928971026432})$ ، $(1+x^{85070591730234615865843651857942052864})$ ، $(1+x^{170141183460469231731687303715884105728})$ ، $(1+x^{340282366920938463463374607431768211456})$ ، $(1+x^{680564733841876926926749214863536422912})$ ، $(1+x^{1361129467683753853853498429727072845824})$ ، $(1+x^{2722258935367507707$

۲۔ اگر لایچھوٹا ہو تو غائب کرو کہ

$$\frac{10}{15} - \frac{2}{4} = \text{لوک جب لا} = \text{لوک لا}$$

۳ - ثابت کرو کہ چیز (ب - ج) + چیز (ج - د) + چیز (د - ب)

$$= \frac{3}{2} \text{ جینر } - \frac{4}{2} \text{ جینر } + \frac{5}{2} \text{ جینر} = \frac{3}{2}$$

۴۔ ثابت کرو کہ کسی زاویہ طہ کا قوسی ناپ ایک مستقل مقدار اور فریل کے دو سلسلوں میں سے ایک کے حاصل جمع کے مساوی ہے:

$$\dots\dots\dots \text{مس ط} - \frac{1}{3} \text{مس ط} + \frac{1}{5} \text{مس ط} - \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots - \text{مم ط} + \frac{1}{3} \text{مم ط} - \frac{1}{5} \text{مم ط} + \dots\dots\dots$$

دوئوں صورتوں میں تمیز کرو اور 4π ، 2π کے زاویوں کے لئے
 مستقلوں کی مقدار معلوم کرو۔

۵۔ سلسلہ ۱۔ $\frac{1}{2!} + \frac{3}{4!} - \frac{5}{6!} + \dots$ تا لامتناہی کو جمع کرو

۶۔ ثابت کرو کہ ممزّا $\frac{1}{p} = \frac{1}{1-p}$ ہو کہ

نیز نمز ۱ لا کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ

۷۔ ثابت کر دو کہ

جب ن عہ + ق جب (ن-۱) عہ
 $\frac{1}{2}$ جم عہ - $\frac{1}{2}$ جم عہ - $\frac{1}{2}$ جم عہ - ... - $\frac{1}{2}$ جم عہ + ق جب (ن+۱) عہ + ق جب ن عہ
 جہاں دائیں جانب کے خارج قسمتوں کی تعداد ن ہے۔ (استقرارے کا طریقہ استعمال کرو)

۸۔ ثابت کر دو کہ ن حادہ زاویوں کی جیب التمام کی ہندسی اوسط ان زاویوں کی حسابی اوسط کی جیب التمام سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۹۔ $88 + 16 = 104$ کے تمام جذور الکعب محسوب کرو، یہ معلوم ہے کہ جب مس ط = ۲ تو مس ۳ ط = $\frac{2}{11}$

۱۰۔ اگر لا گھٹتے گھٹتے صفر ہو جائے تو $\frac{\text{ق جب } ۱ - \text{ق جب } ۲}{\text{مس لا}}$ کی

انتہائی قیمت معلوم کرو۔

۱۱۔ ثابت کر دو کہ

$$(۱) \text{ مس } ۱ \left[\frac{۱-۱}{۱+۱} \text{ مس } \frac{۱}{۲} \right] = \text{ جم } ۱ \frac{۱+۱}{۱+۱} \text{ جم لا}$$

$$(۲) \text{ لوک } \frac{۱+۱}{۱+۱} + \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ مس } \frac{۱}{۲} = \text{ جم } ۱ \frac{۱+۱}{۱+۱} \text{ جم لا}$$

۱۲۔ صفر سے ۱۱ تک لا کی سب قیمتوں کے لئے سلسلہ

$$\frac{۲}{۳ \times ۱} \text{ جب } ۲ \text{ لا} - \frac{۴}{۵ \times ۳} \text{ جب } ۴ \text{ لا} + \frac{۶}{۷ \times ۵} \text{ جب } ۶ \text{ لا} - \dots \dots \dots \text{ تا لا انتہائی}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

مس عد مس ۲ عد + مس ۲ عد مس ۳ عد + مس ۳ عد مس ۴ عد

کی کن۔ ارقمیں کا حاصل جمع مسن عم طہ۔ ن ہے۔

اس سے سلسلہ $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (n-1) \times n$ راقوں تک

کا حاصل جمع مستنبط کرو۔

۱۴ - نہایت کرو کہ

$$\frac{\dots \times 777 \times 199 \times 10 \times 77 \times 7}{\dots} = 77$$

$$\dots \times 322 \times 190 \times 99 \times 30 \times 2$$

$$\dots \times 77 \cdot \times 777 \times 8 \cdot \times 8 = 77$$

$$\dots \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 1 \times 9$$

[دفعہ ۱۲۳ کا جواب استعمال کرو]

۱۵۔ ایک جریب کے ذریعہ زمین کے ایک مثلث ٹکڑے کی پیمائش

کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۰۰، ۲۰۰، ۲۰۰،

۴۰۰۔ جریب ہیں۔ لیکن جریب کے متواتر استعمال سے اس کا طول صلی

جرب کے طول سے بقدر ۲ فیصد کے زیادہ ہو گیا ہے۔ اگر ۱۰۰ جرب

= ۶۶ فٹ تو بتاؤ کہ مثلث کے محسوبہ رقبہ میں شکتے مربع فٹ کی غلطی ہے

۱۶۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کا قطر بیرونی دائرہ کے

نصف قطر سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتا۔ [حصہ اول، دفعہ ۲۰۸ کے نتیجہ

صریح کو استمال کرو]

۷۱۔ اگر لا = حجم طہ + خ جیب طہ تو ثابت کرو کہ

$$\dots\dots\dots \frac{1}{+ ۲۱} + \frac{1}{+ ۲۲} + \frac{1}{+ ۲۳}$$

$$= (\text{جم } ۲ + \text{جم } ۲۱) - \frac{1}{۲} - \text{جم } ۲ + ۱ - [(\text{جم } ۲ - \text{جم } ۲۱) - \frac{1}{۲}] - \text{جب } ۲$$

۱۸۔ سنی میں کا ضابطہ ثابت کرو یعنی یہ ثابت کرو کہ اگر لا چھوٹا ہو تو لا اور

$$\frac{۳ \text{ جب } ۲۱}{۲ + \text{جم } ۲۱} \text{ کا فرق تقریباً } \frac{۳۲}{۳۵} \text{ ہوتا ہے۔}$$

$$۱۹۔ ثابت کرو کہ مس ۱ (خ) = \left(\frac{۱ - ۲}{۱ + ۲} \right) = - \frac{۱}{۳} \text{ کوک } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۰۔ \text{سلسلہ } \frac{۴}{۵ \times ۳ \times ۱} + \frac{۱۹}{۹ \times ۷ \times ۵} + \frac{۳۱}{۱۳ \times ۱۱ \times ۹} + \dots\dots\dots$$

حاصل جمع لاتنا ہی تک محبوب کرو، اس میں شمار کنندے سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔
(دفعہ ۹۴ میں طہ کو $\frac{۳۱}{۳۵}$ کے مساوی رکھو)

$$۲۱۔ \text{سلسلہ } \frac{\text{جم } ۲}{۲ \times ۱} + \frac{\text{جم } ۲}{۳ \times ۲} + \frac{\text{جم } ۳}{۳ \times ۳} + \dots\dots\dots \text{ کا حاصل جمع}$$

لاتنا ہی تک معلوم کرو۔

$$۲۲۔ \text{سلسلہ } \text{مس } ۱ + \text{مس } ۲ + \text{مس } ۳ + \dots\dots\dots \text{ کی ن}$$

رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$۲۳۔ \frac{\text{جب } ۲}{۱ - \text{جب } ۲} \text{ کو طہ کے انصاف کی جیوب کے سلسلہ میں پھیلاؤ۔}$$

$$۲۴۔ \text{سلسلہ } \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \text{ کا حاصل جمع}$$

معلوم کرو۔

(اس کو کسور جزوی میں تحلیل کرو اور اسلئے ۲۱ مشق ۷ کے ربط سے کام لو)

۲۵۔ اگر حجم طہ + حجم ذہ + حجم سہ = ۰ اور جب طہ + جب فہ + جب سہ = ۰

تو ثابت کرو کہ حجم ۳ طہ + حجم ۳ فہ + حجم ۳ سہ = ۰ (طہ + فہ + سہ) = ۰

اور جب ۳ طہ + جب ۳ فہ + جب ۳ سہ = ۰ جبہ (طہ + فہ + سہ) = ۰

۲۶۔ ثابت کرو کہ جس زاویہ کی جیب $\frac{1}{2}$ ہے اس کا اور دو قانوں کے

ساتویں حصہ کا فرق ایک نیم قطری کے ہزارویں حصہ سے کم ہے۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے قطعہ کا ارتفاع ف ہے اور اس کے وتر کا طول ج ہے

ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{2}$ کی دوسری اور اس سے بڑی قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے

تو اس قطعہ کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ف ج کے مساوی ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ مساوات جیز لا = جیز عہ کے سب حل جہن خ ۲ + (۱-۲) عہ

میں شامل ہیں۔

۲۹۔ اگر لا، اور ۲۲ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ۲ \text{ لا} + \frac{\text{جب } ۳ \text{ لا}}{۳ \times ۲} + \frac{\text{جب } ۴ \text{ لا}}{۴ \times ۳} + \dots \text{ تالانتا ہی}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ جب لا} [۱ - ۲ \text{ لوک } (۲ \text{ جب } \frac{1}{2})]$$

۳۰۔ اگر یہ معلوم ہو کہ مس (ذہ + طہ) حجم ۲ عہ = مس فہ تو ثابت کرو کہ

طہ = مس ۲ عہ جب ۲ فہ + $\frac{1}{2}$ مس ۲ عہ جب ۲ فہ + $\frac{1}{2}$ مس ۲ عہ جب ۲ فہ + +

۳۱۔ ایک مثلث کا رقبہ ذیل کی پائنتوں کی بنا پر محبوب کیا گیا ہے :

ب = ۱۲۵ فٹ، ج = ۱۶۰ فٹ، ۱ = ۵۴، ۲ = ۳۵، انہی اجزا کی دوسری پائنتش

کی رو سے ب = ۱۲۵ و ۵ فٹ، ج = ۱۶۱ فٹ، ۱ = ۵۴، ۲ = ۲۵، بتاؤ کہ ان

محصلہ رقبوں میں کتنے فیصد کا فرق ہے۔

۴۷۲۔ جب (عہ - ہ) + جب (بہ - جہ) + جب (جہ - عہ) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

[ایک مثلث ا ب ج کے بڑے سے بڑا قعر پر غور کرو جبکہ مثلث ایک ایسے دائرہ کے اندر بنا ہوا ہے جس کا مرکز وہی ہے اور خطوط ا ب، ب ج، ج ا ایک ثابت خط مستقیم کے ساتھ زاوے عہ، ہ، جہ بناتے ہیں]

۴۷۳۔ مساوات متانثلہ $\frac{ا^2}{(ب-ا)(ج-ا)} + \frac{ب^2}{(ج-ب)(ا-ب)} + \frac{ج^2}{(ا-ج)(ب-ج)} = ۱$ سے ذیل کے متانثلات مستنبط کرو :-

۳ جم (عہ + طہ) جب (بہ - جہ)

= ۴ جم (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

۴ جب (عہ + طہ) جب (بہ - جہ)

= ۴ جب (۳ طہ + عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

[۱ جم (۲ عہ + ۲ طہ) + ۲ خ جب (۲ عہ + ۲ طہ) رکھو]

۴۴۔ ثابت کرو کہ ۴ مس لا - ۴ مس لا اور ۴ جب لا - ۱۵ لا کا فرق ساتویں مرتبہ کی مقدار سے بھی کم ہے۔

۴۵۔ اگر ایک مستدیر قوس کے وتر کا طول ۱ ہو اور اس قوس کے نصف کے وتر کا طول ب ہو تو ثابت کرو کہ قوس کا طول تقریباً $\frac{۸ ب - ۱}{۳}$ ہے۔

اگر قوس مذکور کے ایک ربع کے وتر کا طول ج ہو تو ثابت کرو کہ قوس کے طول کی نسبتاً زیادہ صحیح قیمت $\frac{۲۵ ج + ۲۰ ب - ۱}{۴۵}$ ہوگی۔

اگر قوس ایک ربع ہو تو ثابت کرو کہ ان سے ۲۲ کی قیمتیں بالترتیب ا عشریہ کے دوسرے اور پانچویں مقام تک صحیح نکلتی ہیں۔

۳۶۔ اگر لوک لوک (لا + خا) = ف + خ ق تو

$$1 = لا مس [مس ق لوک بر لا + لا + ۱]$$

$$\dots\dots\dots \frac{\text{جم ط}}{۵} + \frac{\text{جم ط}}{۳} - \text{جم ط}$$

۳۷۔ ثابت کرو کہ

$$\dots\dots\dots 1 - \frac{\text{جم ط}}{۲} + \frac{\text{جم ط}}{۲}$$

$$\dots\dots\dots \frac{\text{جم ط}}{۵} + \frac{\text{جم ط}}{۳} - \text{جم ط}$$

$$\dots\dots\dots 1 - \frac{\text{جم ط}}{۲} + \frac{\text{جم ط}}{۲}$$

۳۸۔ سلسلہ جب ط قط ۳ ط + جب ۳ ط قط ۳ ط + جب ۳ ط قط ۳ ط +
تتا ن رقوم کو جمع کرو۔

۳۹۔ ایک مثلث ا ب ج میں اگر ب > گ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ب} = \frac{\text{ب}}{۱} \text{ جب ج} + \frac{۱}{۲} + \frac{\text{ب}}{۲} \text{ جب ج} + \frac{۱}{۳} + \frac{\text{ب}}{۳} \text{ جب ج} + \dots\dots\dots$$

$$\text{اور (۲) } \frac{\text{گ}}{\text{ج}} \text{ جب ن ب} = \text{ن} \times \frac{\text{ب}}{۱} \text{ جب ج} + \frac{\text{ن} (۱ + \text{ن})}{۲} \times \frac{\text{ب}}{۲} \text{ جب ج} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots + \frac{\text{ن} (۱ + \text{ن}) (۲ + \text{ن})}{۳ \times ۲ \times ۱} \times \frac{\text{ب}}{۳} \text{ جب ج} + \dots\dots\dots$$

۴۰۔ ایک مثلث کے اضلاع کے طول حسب پیمائش یہ ہیں: ۲ = ب، ۳ = ج، ۴ = گ
بعد میں معلوم ہوا کہ ج کی پیمائش میں تھوڑی سی غلطی واقع ہو گئی ہے، بتاؤ کہ کونسا

نادیدہ مکمل صحت کے ساتھ معلوم ہو سکتا ہے۔

۴۱۔ مساوات متانہ

$$۲۱ = \frac{(۱-ب)(۱-ج)}{(ب-ج)(۱-ب)} + \frac{(۱-ب)(۱-ج)}{(ب-ج)(۱-ب)} + \frac{(۱-ب)(۱-ج)}{(ب-ج)(۱-ب)}$$

سے متانہات جم ۲ (ط + ع) = $\frac{\text{جب (ط - ب) جب (ط - ج)}}{\text{جب (ع - ب) جب (ع - ج)}}$ + دو متانہات بقوم = جم ۳ ط

اور جب ۲ (ط + ع) = $\frac{\text{جب (ط - ب) جب (ط - ج)}}{\text{جب (ع - ب) جب (ع - ج)}}$ + دو متانہات بقوم = جب ۳ ط مستطی کرو

۴۲۔ اگر مس (ط - ذ) = $\frac{\text{ذ}^۲ \text{ جب ۳ ط جم ط}}{\text{۱ - ذ جب ۲ ط}}$ اور ۵ بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ذ} = ط - \frac{\text{ذ}^۲}{۲} - \frac{\text{ذ}^۳}{۳} - \frac{\text{ذ}^۴}{۴} - \frac{\text{ذ}^۵}{۵} - \dots$$

۴۳۔ اگر جم $(\frac{۳}{۴} \text{ جب ط}) = \text{جب}(\frac{۳}{۴} \text{ جم ط})$ تو ثابت کرو کہ ط کی قیمتوں کے چار جوڑے ملے

$$\text{ط} = (۲ + \frac{۳}{۴}) + ۱۱ + \frac{۱۱ + ۱۶ + ۸ - ۱}{۲}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں م اور ن کسی مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور م صفر بھی ہو سکتا ہے۔

ن = ۰ کی صورت میں اس کا کیا حل ہو گا؟

$$۴۴۔ \text{سلسلہ مس ط مس ط} + ۲ \text{ مس ط مس ط} + ۲ \text{ مس ط مس ط}$$

$$+ ۲ \text{ مس ط مس ط} + ۲ \text{ مس ط مس ط} + \dots \text{ کی ن رقموں کا حاصل}$$

جمع معلوم کرو۔

۴۵۔ اگر $\text{م} + \frac{1}{\text{م}} = 1$ تو فہ کو ایک ایسے سلسلہ میں پھیلاؤ جو لا کی صعودی قوتوں پر مشتمل ہو۔

۴۶۔ ثابت کرد کہ سلسلہ

$$\frac{2 \times 1}{23} + \frac{3 \times 2}{25} + \frac{4 \times 3}{27} + \dots + \frac{124 \times 123}{247}$$

کا حاصل جمع $\frac{(24 - 12)^2 \cdot 2}{382}$ ہے۔ (دفعہ ۱۲۴ کو استعمال کرو)

۴۷۔ کسر مسلسل $\text{م} - \frac{2}{\text{م}} - \frac{2}{\text{م}^2} - \frac{2}{\text{م}^3} - \dots - \frac{2}{\text{م}^n} - \frac{2}{\text{م}^{n+1}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

۴۸۔ ثابت کرد کہ کسی مستوی مثلث کی صورت میں جملہ $\text{مس ب مس ج} + \text{مس ج مس ا} + \text{مس ا مس ب}$

کی قیمت اور ۹ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتی۔

(پہلے دکھاؤ کہ جملہ مذکور $= 1 + \text{قط ل قط ب قط ج}$ اور پھر دفعہ ۱۵۲ کا طریقہ استعمال کرو)

۴۹۔ اگر $\text{جم ی} = \text{جم (ی + ا)} + \text{جم (ی + لا)} + \text{جم (ی + لا + ا)}$ ہو اور Δ اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے کعبوں سے بڑی قوتیں نظر انداز ہو سکتی ہیں) تو ثابت کرد کہ

$$\Delta = \Delta \text{ جم ہ} - \Delta \frac{1}{\text{م}} \text{ جم ی جب ہ} + \Delta \frac{1}{\text{م}^2} \text{ جم ی جب ہ}$$

۵۰۔ ثابت کرد کہ اگر

$$(1 + \text{خ مس عہ}) + \text{غ مس ب}$$

کی قیمت حقیقی ہوں تو ایک قیمت (قطعہ) قطعہ ہوگی۔

۵۱- سلسلہ $\frac{\text{مجم } ۲ \text{ عمده}}{\text{مجم } ۳ \text{ عمده}} + \frac{\text{مجم } ۳ \text{ عمده}}{\text{مجم } ۴ \text{ عمده}} + \frac{\text{مجم } ۴ \text{ عمده}}{\text{مجم } ۵ \text{ عمده}} + \dots$
 ... کی ن رقوموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۲- ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{8}) + \dots$$

اس سے $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ کی تفصیل ط کے اضعات کی جیوب اتمام میں معلوم کرو۔

$$53- \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

(دفعہ ۱۲۰ کا پہلا ضابطہ استعمال کرو)

۵۴- سلسلہ $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots$ کا
 حاصل جمع معلوم کرو۔

۵۵- ثابت کرو کہ اُس بڑے سے بڑے مثلث کا رقبہ جس کا قاعدہ ب ہو اور

جس کے اضلاع کی نسبت $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۵۶- ترسیم بنا کر ثابت کرو کہ مساوات جب $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ کی حقیقی اصولوں کی تعداد
 لامتناہی ہوتی ہے اور بڑی مثبت اعلیٰ زوجوں پر مشتمل ہوتی ہیں جن میں سے
 ایک $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ سے قدرے بڑی ہوتی ہے اور دوسری قدرے چھوٹی جہاں
 کسی بڑے مثبت صحیح عدد کو تقسیم کرتا ہے۔

۵۷- ایک دائرہ کے اندر اور باہر اضلاع کے منظم کثیر الاضلاع بنائے گئے
 ہیں، ثابت کرو کہ اگر ن بہت بڑا ہو تو محیطوں کا اوسط لینے سے $\frac{1}{2}$ کی جو تقریبی قیمت حاصل ہوتی ہے
 وہ اُس قیمت سے جو رقوموں کا اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے بقدر $\frac{1}{2}$ کے زیادہ صحیح ہے

۵۸۔ ایک دائرہ کے اندر جبکہ نصف قطر 1 ہے n اضلاع کا ایک منتظم کثیرالاضلاع بنایا گیا ہے۔ اس کثیرالاضلاع کے رأسوں سے دائرہ کے ایک تماس پر عمود نکالی گئے ہیں ثابت کرو کہ ان عمودوں کے متکافیوں کا حاصل جمع $\frac{n+1}{2}$ ہے۔ n طہ ہے جہاں 2 طہ اس زاوے کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ تماس میں سے گزرنے والا نصف قطر کثیرالاضلاع کے کسی رأس الزاویہ میں سے گزرنے والا نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے۔

۵۹۔ ثابت کرو کہ $\frac{(1 + \text{خ ب}) (ن + \text{خ ق})}{(1 - \text{خ ب}) (ن - \text{خ ق})}$ کی قیمت خاص

جم 2 (ن + ع + ق لوک 1) + خ جب 2 (ن + ع + ق لوک 1) ہے

جہاں $r = \frac{1}{2} (1 + \text{ب})$ اور $e = \frac{1}{2} (1 - \text{ب})$

۶۰۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۱۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۶۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots} = \frac{1}{2}$ ۔

۶۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots} = \frac{1}{2}$ ۔

۶۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots} = \frac{1}{2}$ ۔

۱۔ اگر ایک دائرہ کے اندر جس کا نصف قطر ہے ایک منتظم مسج (سات ضلعوں کی شکل) بنایا جائے اور اس کے چار متصل راس 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ا ج + ا د - ا ب = م ا$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{قط } لا = ۱ + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} + \frac{لا^۶}{۶} + \frac{لا^۸}{۸} + \dots$$

$$\text{اور قط } لا^۳ = ۱ + \frac{لا^۳}{۲} + \frac{لا^۵}{۴} + \frac{لا^۷}{۶} + \frac{لا^۹}{۸} + \dots$$

۳۔ اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$م^۲ \frac{۲}{ن} + م^۲ \frac{۴}{ن} + \dots + م^۲ \frac{(۱-ن)}{ن} = \frac{۱}{۴} (۱-ن)(۲-ن)$$

۴۔ اگر ن جفت ہو تو ثابت کرو کہ

$$م^۲ \frac{۲}{ن} + م^۲ \frac{۴}{ن} + \dots + م^۲ \frac{(۱-ن)}{ن} = \frac{۱}{۴} (۱-ن)$$

۵۔ اگر ن کوئی جفت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو

$$\frac{۲}{ن} = \frac{۲}{ن} \text{ قط } ۲ + \frac{۲}{ن} \text{ قط } ۴ + \dots + \frac{۲}{ن} \text{ قط } (۳-ن)$$

$$۶۔ \sum_{r=1}^{n-1} r^{۲-ن} \text{ قط } (عہ + \frac{۲}{ن}) =$$

مساوی ہے ن^۲ قط ن عہ کے اور اگر ن جفت ہو تو یہ مساوی ہے

$$\frac{ن^۲}{۱-} \text{ کے } -$$

$$۱- \frac{۳}{۴} (۱-ن) \text{ جم } ن \text{ عہ}$$

۷۔ دفعہ ۵۲ کی مسادات (۴) میں ن کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{لوہ} = \frac{(۲۰ + ۲۰) \text{ جم } - \text{لوک} ۱ \text{ جب } ۷}{\text{لوہ}}$$

۸۳ - استدلال ذیل کی غلطی معلوم کر دو

$$\text{لوہ} = (\text{لوہ} - ۲۰) \times \text{خ} = [(\text{لوہ} - ۲۰) \times \text{خ}] = \text{لوہ} - ۲۰$$

۸۴ - $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} (۱ + ۲) = \frac{۱}{۲}$ جہاں $\frac{۱}{۲}$ کی قیمت کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ مساوات محسوس لا کے حل تقریباً $(\frac{۱}{۲} - ۷) \pm (\frac{۱}{۲} - ۷)$

۸۵ - ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۳ \times ۱} - \frac{۱}{۵ \times ۳} + \frac{۱}{۷ \times ۵} - \frac{۱}{۹ \times ۷} + \dots = \frac{۲-۲}{۳}$

اور $\frac{۱}{۵ \times ۳} - \frac{۱}{۷ \times ۵} + \frac{۱}{۹ \times ۷} - \frac{۱}{۱۱ \times ۹} + \dots = \frac{۲-۲}{۵}$

[دوسرے حصہ کے لئے لوک $\frac{۱}{۱-۱}$ کی تفصیل میں لا کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ خ $\frac{۱}{۲}$ رکھو]

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع $\frac{۱}{۲}$ تک معلوم کرو

۸۶ - $\frac{\text{جب } ۳}{\text{جم } ۲ \text{ جم } ۲} + \frac{\text{جب } ۵}{\text{جم } ۴ \text{ جم } ۴} + \frac{\text{جب } ۷}{\text{جم } ۶ \text{ جم } ۶} + \dots$

۸۷ - $\frac{۱}{۳-۱} \text{ مس } ۲ \text{ ط} + \frac{۱}{۳-۱} \text{ مس } ۳ \text{ ط} + \frac{۱}{۳-۱} \text{ مس } ۴ \text{ ط} + \dots$

۸۸ - $\frac{\text{جب } ۲}{\text{جب } ۲} + \frac{\text{جب } ۲}{\text{جب } ۲} + \frac{\text{جب } ۲}{\text{جب } ۲} + \dots$

۸۹ - $\frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \frac{۲}{۲} \text{ جم } ۲ + \dots$

۹۰ - $\frac{۲}{\text{جب } ۳ \text{ ط}} + \frac{۲}{\text{جب } ۳ \text{ ط}} + \frac{۲}{\text{جب } ۳ \text{ ط}} + \dots$

۹۱ - $\frac{۳}{\text{جم } ۳ \text{ لا}} + \frac{۳}{\text{جم } ۳ \text{ لا}} + \frac{۳}{\text{جم } ۳ \text{ لا}} + \dots$

$$۹۲ - \frac{\text{جب ۵ عہ}}{\text{جم ۴ عہ جم ۶ عہ}} + \frac{\text{جب ۳ عہ}}{\text{جم ۲ عہ جم ۴ عہ}} + \frac{\text{جب ۲ عہ}}{\text{جم ۱ عہ جم ۳ عہ}} + \dots$$

$$۹۳ - \frac{\text{جب ۹ طہ}}{\text{جم ۵ طہ - جم ۱۸ طہ}} + \frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۲ طہ - جم ۶ طہ}} + \frac{\text{جب ۲ طہ}}{\text{جم ۱ طہ - جم ۳ طہ}} + \dots$$

$$۹۴ - \frac{\text{جب ۱۲ لا}}{\text{جم ۴ لا جب ۸ لا}} + \frac{\text{جب ۶ لا}}{\text{جم ۲ لا جب ۴ لا}} + \frac{\text{جب ۳ لا}}{\text{جم ۱ لا جب ۲ لا}} + \dots$$

$$۹۵ - \frac{1}{3} \text{ مس ۲ مس ۱ طہ} + \frac{1}{4} \text{ مس ۲ مس ۱ طہ} + \frac{1}{5} \text{ مس ۲ مس ۱ طہ} + \dots$$

$$۹۶ - \text{مس ۱} \frac{12}{31} + \text{مس ۱} \frac{12}{139} + \dots + \text{مس ۱} \frac{12}{5-234} + \dots$$

$$۹۷ - \text{مس ۱} \frac{2}{19} + \text{مس ۱} \frac{2}{19} + \dots + \text{مس ۱} \frac{2}{3+234} + \dots$$

$$۹۸ - \text{مس ۱} \frac{لا}{2 \times 2 - 1} + \text{مس ۱} \frac{لا}{2 \times 2 - 1} + \dots + \text{مس ۱} \frac{لا}{2 \times 2 - 1} + \dots$$

$$۹۹ - \text{مس ۱} \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{جم ۱ طہ}} + \text{مس ۱} \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{جم ۲ طہ}} + \text{مس ۱} \frac{\text{لا جب ۲ طہ}}{\text{جم ۳ طہ}} + \dots$$

$$+ \text{مس ۱} \frac{\text{لا جب ۸ طہ}}{\text{جم ۸ طہ}} + \dots$$

$$۱۰۰ - \text{جز ۱} \frac{۲}{۲} + \text{جز ۲} \frac{۲}{۲} + \text{جز ۳} \frac{۲}{۲} + \dots + \text{جز ۴} \frac{۲}{۲} + \dots$$

$$۱۰۱ - \frac{1}{2} \text{ قم ۱ مم ۱ طہ} + \frac{1}{4} \text{ قم ۱ مم ۱ طہ} + \frac{1}{8} \text{ قم ۱ مم ۱ طہ} + \dots$$

۱۰۲ - ایک سلسلہ کی رو میں رقم $\frac{1}{2}$ - جم ۲ مس ۱ طہ ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لانا ہی تک معلوم کرو۔

۱۱۲ - ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+4} + \dots + \frac{1}{1+n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\text{اور (۲) } \frac{1}{1-2} + \frac{1}{1-3} + \frac{1}{1-4} + \dots + \frac{1}{1-n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

(اشد ۲۱ مشق ۷ کا جواب استعمال کرو)

۱۱۳ - ثابت کرو کہ $\frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+2} + \frac{1}{4+3} - \frac{1}{5+4} + \dots = \frac{n}{2}$

$$\frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\text{اور } \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3+2} + \frac{1}{4+3} - \frac{1}{5+4} + \dots = \frac{n}{2}$$

$$\frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

(اشد ۲۱ مشق ۹ میں ط کی بجائے $\frac{n}{2}$ اور $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ رکھو)

۱۱۴ - اگر ن جنف ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(1+n) - (1-n)}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{ن} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

اور اس سے مستنبط کرو کہ

$$1 = \frac{n}{2} \text{ مس } \frac{n}{2} \text{ مس } \frac{n}{2} \text{ مس } \dots \text{ مس } \frac{n}{2} (1-n)$$

$$115 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{(1+n) - (1-n)}{2}$$

$$= \frac{(1+n) - (1-n)}{2} \dots \dots \dots \frac{(1+n) - (1-n)}{2}$$

جہاں $r = \frac{1}{p} (n-1)$ اور n طاق ہے۔

۱۱۶۔ ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \dots$

مساوی ہے قطر $(\frac{1}{p} \pi)$ جیفر ۱۱

۱۱۷۔ اگر e ، b ، a جہ اعداد مفرد ۲، ۳، ۵ کو تعبیر کریں

تو $\frac{e^2 - e}{e^2 + 1} \times \frac{b^2 - b}{b^2 + 1} \times \dots$ تا لامتناہی $= \frac{a}{2}$

۱۱۸۔ n اضلاع کے دو منظم کثیرالاضلاع u ، v n اور b ، b ، b ایک ہی دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں جس کا نصف قطر r ہے، ثابت کرو کہ

II (اور بیس) $= \frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

جہاں r اور s کو اسے n تک سب قیمتیں دی جائیں اور r اس زاویہ کو تعبیر کرے جو دو اشکال مذکورہ بالا میں سے ہر ایک کے ایک رأس الزاویہ کو مرکز دائرہ سے وصل کرنے والے نصف قطروں کے درمیان بنتا ہے۔

۱۱۹۔ n اضلاع کا ایک منظم کثیرالاضلاع ہے جو نصف قطر r کے ایک دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے، دائرہ کا مرکز O ہے، ثابت کرو کہ n زوایا کا حاصل جمع $2n$ ، b ، c ، d ، وغیرہ $2n$ کے ساتھ بناتے ہیں

مس $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

ہے، جہاں $2n = r$ اور $\frac{r}{2} = 2n$

دفعہ ۱۱۹ کی مانند لا۔ n جسم n طہ n جب n طہ کو اس کے خطی اجزائے

ضروری میں تھیں کرو اور مثلہ ہذا کی پہلی مشق کے مسئلہ کے مطابق عمل کرو)

۱۲۰۔ ایک دائرہ کے ماس پر نقطہ تماس ب سے مساوی فاصلے ب ب'، ب' ب'، ماسپے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ دائرہ کے قطر کے مساوی ہے، ان فاصلوں کے وسطی نقاط ج، ج'، ہیں نقطہ تماس ب میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے ا کو نقاط ب، ب'، ج، ج'، سے وصل کیا گیا ہے اور یہ خط دائرہ سے بالترتیب نقاط ب، ب'، ب'، ج، ج'، پر ملے ہیں۔ ثابت کرو کہ اوتار ب ب'، ب' ب'، کے حاصل ضرب کی نسبت ب ج، ب ج'، کے حاصل ضرب کے ساتھ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ہے۔

۱۲۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}^2 - (\text{مسز نام لا}) = \text{مس}^2 - \frac{1}{2} \text{مس}^2}{\frac{2 \text{ لا}^2}{2 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا}^2 + 2 \text{ لا}^2}}$$

دونقاط ن اور ق کا باہمی فاصلہ ۲ ف کے مساوی ہے اور یہ دونوں نقطے ایک خط مستقیم سے مساوی فاصلوں ج پر واقع ہیں۔ اس خط مستقیم پر لا متناہی نقطوں کا ایک ایسا سلسلہ واقع ہے کہ ان نقطوں کا باہمی فاصلہ ۱ ہے اور نقاط ن اور ق ان میں سے ایک نقطہ سے متساوی الفصل ہیں، ثابت کرو کہ اگر ان نادیوں کا مجموعہ جون ق کے محاذی سلسلہ بالا کے ہر ایک نقطہ پر بنتا ہے طہ ہو تو

$$\frac{\text{مس}^2 - \text{مس}^2}{\frac{2 \text{ ف}^2}{2 \text{ ف}^2 + 2 \text{ ف}^2 + 2 \text{ ف}^2}} = \frac{2 \text{ ف}^2}{2 \text{ ف}^2 + 2 \text{ ف}^2 + 2 \text{ ف}^2}$$

(دفعہ ۱۲۲ کے مطابق جب (لا + خ م) کے اجزائے ضروری ہو اور مثلہ ہذا کی مشق

ادل کا مسئلہ لگاؤ)

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(دفعہ ۳۰ کی مساوات (۲) سے شروع کرو اور ۲ = ۲ طہ = ۲۴ کا آخر رکھو)

۱۲۷۔ ثابت کرو کہ

مسئله ۱- مساحت $\frac{1}{3}$ لایحه $\frac{1}{6}$ لایحه تا الی تنهایی = مساحت (مساحت $\frac{1}{3}$)

(امثلہ ۲۱ کی شق ۳ میں عہ = $\frac{\pi}{\pi}$ اور طہ = $\frac{\pi}{\pi}$ لاخ رکھو)

۱۲۸۔ اگر لاکھ کوئی مثبت کسر ہو اور سن انا اس چھوٹے سے چھوٹے مثبت زاویہ کو تعبیر کرے جس کا ماس ما ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+n)!}{(1+n)! - 2^n (1+n)!} = \left[\text{جنبر} \frac{n!}{n} \text{قط} \frac{n!}{n} \right] \frac{\pi \text{لاما}}{n}$$

۱۲۹۔ اگر مثلث ا ب ج کے زوائدے حادہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج < جم ا + جم ب + جم ج

۱۳۰۔ ایک مثلث ABC کے زاویوں کے داخلی منصف مقابل کے اضلاع

سے نفاذ دعوے پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث دعوے کا رقبہ

مثلاً ب ج کے رتبہ کے ایک چوتھائی سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

۱۳۱۔ اگر بہ کی قیمت صفراور $\frac{7}{11}$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ اگر طے

صفر سے بڑھ کر پہلے ہو جائے تو جملہ بہ جب طہ - طہ جب بہ کی قیمت پہلے

باتسلل ٹرختی ہے اور پھر باتسلل گھٹتی ہے۔

۱۳۲۔ ثبوت کرو کہ نقطہ

حجم طه | • • • • •
 • | حجم طه |
 • | حجم طه |

 | حجم طه |
 | | حجم طه

کی قیمت جون ستونوں اور ن قطاروں پر مشتمل ہے جم ن طہ کے مساوی ہے۔
۱۳۳۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

کان واں مستحق (مس عہ + قطع عہ) - (مس عہ - قطع عہ) ج
 (مس عہ + قطع عہ) - (مس عہ - قطع عہ) ج

۱۳۴۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{2}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{2} + \dots$$

کان واں مستحق جب ۲ ن عہ
 جم عہ جب (۲ + ن) عہ ہے۔

۱۳۵۔ ثابت کرو کہ ذیل کی کسر مسلسل کی قیمت

$$\frac{2}{-1} - \frac{2}{-3} + \frac{2}{-1} - \frac{2}{-3} + \dots$$

خارج قسموں تک

جب ۲ عہ
 ۲ جب (۱ + ر) عہ جم عہ ہے۔

۱۳۶۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{-1} - \frac{2}{-3} + \frac{2}{-5} - \dots$$

(ذیل کے سوالوں میں احصائے تفرقات سے کام لینے میں
 بہت آسانی ہوگی)

۱۳۷۔ ثابت کرو کہ $م^۳ذ + م^۳(ذ + \frac{۱}{۳}) + م^۳(ذ + \frac{۲}{۳}) + \dots + م^۳(ذ + \frac{۲}{۳}) + \dots$ ن رتوں تک

$$= م^۳(ذ + \frac{۱}{۳}) + م^۳(ذ + \frac{۲}{۳}) + \dots + م^۳(ذ + \frac{۲}{۳}) + \dots$$

(اشلہ ۹ مشق ۶ کے جواب کو دو دفعہ تفرق کرو)

۱۳۸۔ ایک مساوی اساقین شلث کے دو مساوی اضلاع کا طول دیا ہو اور ثابت کرو کہ جب اندرونی دائرہ کا نصف قطر بڑے سے بڑا ہو تو مساوی اضلاع کے درمیانی زاویہ کی قیمت قریب ترین درجہ تک ۶۰ کے مساوی ہوگی۔

۱۳۹۔ سلسلہ $قط\ ۱ + \frac{۱}{۲} قط\ ۲ + \frac{۱}{۳} قط\ ۳ + \frac{۱}{۴} قط\ ۴ + \dots$ کی ن رتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۴۰۔ سلسلہ $م^۳ + \frac{۱}{۲} م^۳ + \frac{۱}{۳} م^۳ + \frac{۱}{۴} م^۳ + \dots$ تالانتا ہی کو جمع کرو۔

۱۴۱۔ $\frac{۱}{۱+۲+۳+\dots+n}$ کون ایسے کسور جزوی کے حاصل جمع کی

شکل میں لکھو جن میں سے ہر ایک کا نسب نالائیں درجہ دوم کا ایک جملہ ہو۔

۱۴۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱+۲} + \frac{۱}{۱+۲+۳} + \frac{۱}{۱+۲+۳+۴} + \dots = \frac{۱}{۱}$$

(اشلہ ۲ مشق ۱۱ کے جواب کو تفرق کرو)

۱۴۳۔ ایک لانتا ہی طول کا خط نقطوں کی ایک لانتا ہی تعداد سے ایسے

حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جن میں سے ہر ایک حصہ کا طول ۱ ہے، اس خط پر

ایک اور نقطہ و کہیں مایا گیا ہے، ثابت کرو کہ وہ جو فاصلے نقاط تقسیم سے

ہیں ان کے متکافوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ

$$\frac{۲۲}{۳۳} - (۳ \text{ قم } ۲ \frac{۲}{۳} - ۲ \text{ قم } ۲ \frac{۲}{۳}) =$$

(اشد ۲ مشق ۱۱ کے جواب کو دوسرے تہ تفرق کرو)

۱۴۴ - ثابت کرو کہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}$$

(دفعہ ۱۳۰ کی مسادات (۲) میں ۲ = ۲ ط = ۲ لا م = رکھو پھر لو کار تم

لیکھ کر کے محاف سے تفرق کرو)



جوابات

حصہ دوم

۱ صفحہ ۱۳

۸- لوک نو ۹- لوک نو - لوک نو

۲ صفحہ ۳۳

۱- $\sqrt{2}(\text{جم} + \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4})$ ۲- $\sqrt{2}(\text{جم} - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \text{ جب } (-\frac{\pi}{4})$ ۳- $2(\text{جم} + \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4})$ ۴- $5[\frac{5}{5} \sqrt{2} + \frac{5}{5} \sqrt{2}]$ ۵- $\sqrt{2+2\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}} \sqrt{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}]$ ۶- $(\sqrt{2}-\sqrt{2})(\text{جم} + \frac{\pi}{12} \text{ جب } \frac{\pi}{12})$ ۷- $\text{جم} (10\text{ اطہ} + 12\text{ اعہ}) - \sqrt{2} \text{ جب } (10\text{ اطہ} + 12\text{ اعہ})$ ۸- $\text{جم} (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{لہ}) + \sqrt{2} \text{ جب } (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{لہ})$ ۹- $\text{جم} 10\text{ اطہ} - \sqrt{2} \text{ جب } 10\text{ اطہ} 10 - 10$

$$۱۱- \text{جب } (۴ع + ۵ی) - \text{خ جم } (۴ع + ۵ی) :$$

$$۱۲- ۵ + \text{جب } ۵ - ۴ \text{ جم } ۵ + ۴ + ۵$$

$$۱۳- \text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲} \pm \text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲}$$

۳ صفحہ ۴۲

$$۱- \frac{۳۱ \pm \text{خ}}{۲} - ۴ \pm \text{خ} \pm \frac{۳۱ \pm \text{خ}}{۲}$$

$$۳- \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}) \text{ جہاں } ر = ۳، ۷، ۱۱$$

$$۴- \pm \text{خ اور } \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲}) \text{ جہاں } ر = ۱ یا ۳$$

$$۵- ۴۷ \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}) \text{ جہاں } ر = ۱، ۹، ۱۷$$

$$۶- ۱۰۸۳ \pm [\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}] \text{ جہاں } ر = ۵، ۱۱، ۱۷$$

$$۷- ۴۴ \pm [\text{جم } \frac{۵}{۲} - \text{خ جب } \frac{۵}{۲}] \text{ جہاں } ر = ۱، ۷، ۱۱$$

$$۸- ۴۷ \pm [\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}] \text{ جہاں } ر = ۱، ۱۳، ۲۵$$

$$۹- ۴۵ \pm [\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}] \text{ جہاں } ر = ۱، ۵، ۱۱، ۱۷، ۲۳$$

$$۱۰- \pm ۲ \text{ اور } \pm ۲ \text{ خ}$$

$$۱۱- ۲ \text{ اور } ۲ [\text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲}] \text{ جہاں } ر = ۲ یا ۴$$

$$۱۲- ۱۰۲۲ - ۱۳ \pm \frac{۳۱ + \text{خ}}{۲} \pm \frac{۳۱ - \text{خ}}{۲}$$

$$۱۴- ۱۶ - \pm \text{خ} \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲}) \text{ اور } \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲})$$

چار آخری قیمتیں

$$۱۷- ۱ \text{ اور } \text{جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲} \text{ جہاں } ر = ۱، ۲، ۱۰$$

$$۱۸- ۱ \text{ جم } \frac{۵}{۲} \pm \text{خ جب } \frac{۵}{۲} \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲}) \text{ اور } \pm (\text{جم } \frac{۵}{۲} + \text{خ جب } \frac{۵}{۲})$$

$$۱۹- ۲۲ \pm \text{جم } \frac{۵}{۲} \text{ جہاں } ر = ۱، ۷، ۱۳$$

۹ صفحہ ۹۶

- ۱۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ جم ن ط (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ [جم ن ط] (ن جفت)
- ۲۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ جب ن ط (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ [جم ن ط] (ن جفت)
- ۳۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)
- ۴۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ [جم ن ط] (ن جفت)
- ۵۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)
- ۶۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)
- ۷۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)
- ۸۔ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن طاق) اور $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)
- ۹۔ اگر ن طاق ہو تو صفرا اگر ن جفت ہو تو $\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ (ن جفت)

۱۱ صفحہ ۱۱۲

- ۱۰۔ جم و جنرہ - خم جب و جنرہ
- ۱۱۔ جب ۲ - خم جنرہ ۲
- ۱۲۔ جنرہ ۲ - جم ۲
- ۱۳۔ جب و جنرہ - خم جم و جنرہ
- ۱۴۔ جنرہ ۲ - جم ۲
- ۱۵۔ جم و جنرہ + خم جب و جنرہ
- ۱۶۔ جم ۲ + جنرہ ۲
- ۱۷۔ جنرہ و جم + خم جنرہ و جب

$$\begin{array}{r}
 \text{جنر ۲ ع + خ جب ۲ ع} \\
 \hline
 \text{جنر ۲ ع + جم ۲ ع} \\
 \text{جنر ۲ ع - خ جنر ۲ ع جب ۲ ع} \\
 \hline
 \text{جنر ۲ ع + جم ۲ ع}
 \end{array}$$

۱۲ صفحہ ۱۲۰

$$\begin{array}{l}
 ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ لوک } \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ [اگر جم ط مثبت ہو تو علامت + ہونی چاہئے} \\
 \text{اگر جم ط منفی ہو تو -]} \\
 ۲ - \text{جب ۱ جب ط + خ لوک } [۱ + \text{جب ط} - \text{جب ط}]
 \end{array}$$

۱۳ صفحہ ۱۲۹

$$\begin{array}{l}
 ۱۵ - \frac{1}{2} \text{ لوک (ی + ی)} + \text{خ مست } \frac{1}{2} \text{ جہاں} \\
 \text{ی} = \frac{1}{2} \text{ لوک جنر ۲ ع - جم ۲ ع اور ی = مست (م لا ستر)}
 \end{array}$$

۱۵ صفحہ ۱۲۲

$$\begin{array}{ccccccc}
 ۱ - ۲ & ۲ - ۲ & ۳ - ۳ & ۴ - ۴ & ۵ - ۵ & ۶ - ۶ & ۷ - ۷
 \end{array}$$

۱۶ صفحہ ۱۵۰

$$\begin{array}{l}
 ۱ - \frac{۲}{۵-۲} \text{ جب ۲ ع} \\
 ۲ - \text{سفر بشر یک ع ۲ کا کوئی ضعف نہ ہو} \\
 \frac{\text{جب ۲ ع (جم ع - جب ع)}}{\text{۱ - جب ۲ ع + جب ۲ ع}} = \frac{\text{جب ۲ ع}}{\text{۱ - جب ۲ ع + جب ۲ ع}}
 \end{array}$$

$$-۵- \text{جب } ع - ج \text{ جب } (ع - ۲) - \text{ج} \text{ جب } (ع + ن + ۲) + \text{ج}^{۱+۵} \text{ جب } \{ع + (ن - ۱) - ۱\}$$

$$-۱- ۲ ج + ج$$

$$\text{جب } ع - ج \text{ جب } (ع - ۲)$$

$$-۱- ۲ ج + ج$$

$$-۶- ۱- ج \text{ جنرے} - ج \text{ جنرے} + ع + ج^{۱+۵} \text{ جنرے} (ن - ۱) + ع$$

$$-۱- ۲ ج \text{ جنرے} + ج$$

$$\text{ج جنرے}$$

$$-۷- ۱- ۲ ج \text{ جنرے} + ج$$

$$-۸- \text{جم } ع + (ن - ۱) - ۱ \{ (ن + ۱) \text{ جم } (ن - ۱) + ع + ن \text{ جم } ن + ع \}$$

$$۲ (۱ + \text{جم } ع)$$

$$-۹- \text{جب } ع + (۲ + ن + ۳) \text{ جب } ن + ع - (۲ + ن + ۱) \text{ جب } (ن + ۱) + ع$$

$$۲ (۱ - \text{جم } ع)$$

$$۱۰- \text{اگر } ن = م \text{ یا } م + م + ۳ \text{ تو صفر اور اگر } ن = م + م + ۲ \text{ یا } م + م + ۲ \text{ تو } ۱$$

$$\text{اگر } ن = م \text{ یا } م + م + ۳ \text{ تو صفر اور اگر } ن = م + م + ۲ \text{ یا } م + م + ۲ \text{ تو } ۱$$

$$۱۱- (۲ \text{ جم } \frac{ن}{۲}) \text{ جب } (ع + \frac{ن}{۲})$$

$$۱۲- (۲ \text{ جب } ع) \text{ جب } (\frac{ن}{۲} + \frac{ن}{۲}) \text{ سوائے اس صورت کے جبکہ } ع = ن$$

$$۱۳- \text{اگر } ن \text{ طاق ہو تو صفر اور اگر } ن \text{ جفت ہو تو } (۱ - \frac{ن}{۲}) \text{ جب } ن$$

$$۱۴- (۲ \text{ جب } \frac{ن}{۲}) \times \text{جب } (\frac{ن}{۲} - \frac{ن}{۲}) : \dots \dots \dots \text{اگر } ن > ۱$$

$$۱۵- \text{یا } (۱ + \text{جم } ط) \dots \dots \dots \text{اگر } ط = \frac{ن}{۲} \text{ اور } \frac{ن}{۲} \text{ کے درمیان واقع ہو}$$

$$۱۶- (۲ \text{ جنرے } \frac{ن}{۲}) \text{ جنرے } \frac{ن}{۲} + ۲ - ی$$

۱۵۵ صفحہ ۱۵۵

- ۱- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۲- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۳- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۴- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۵- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۶- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۷- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۸- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۹- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۰- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۱- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۲- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۳- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۴- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۵- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۶- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۷- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$
- ۱۸- $\frac{1}{2} \text{ جیم جب (ع + ج جب ب)}$

$$۱۹ - \frac{1}{x} = \text{لوک} [(1 + x) \div (1 + x^2 + x^4 + x^7 + x^{10} + x^{13} + x^{16} + x^{19} + x^{22} + x^{25} + x^{28} + x^{31} + x^{34} + x^{37} + x^{40} + x^{43} + x^{46} + x^{49} + x^{52} + x^{55} + x^{58} + x^{61} + x^{64} + x^{67} + x^{70} + x^{73} + x^{76} + x^{79} + x^{82} + x^{85} + x^{88} + x^{91} + x^{94} + x^{97} + x^{100})]$$

$$۲۰ - \frac{1}{x} = \text{سٹا} - \frac{1}{x} \text{ (جم بہ قمرعہ)}$$

$$۲۲ - \frac{1}{x} = [۳۷۲ \text{ لوک } (۲ + ۳۲) - ۱۱]$$

۱۸ صفحہ ۱۶۰

$$۱ - \text{مم} \frac{1}{x} - \text{مم} \frac{1}{x^2} = (۲) \text{ قم ط } \{ \text{مم ط} - \text{مم} (ن + ۱) \text{ ط} \}$$

$$۳ - \text{قم ط} \{ \text{سس} (ن + ۱) \text{ ط} - \text{سس ط} \}$$

$$۴ - \text{قم فہ} \{ \text{سس} (ط + ن + فہ) - \text{سس ط} \}$$

$$۵ - \frac{1}{x} \text{ قم عہ} \{ \text{سس} (ن + ۱) \text{ عہ} - \text{سس عہ} \}$$

$$۶ - \text{جی} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ مم} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ مم} ۲ \text{ ط} \text{ اور}$$

$$\text{ج} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ مم} ۲ \text{ ط}$$

$$۷ - ۲ \text{ فز ۲ ط} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ فز} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$۸ - \text{سس} \frac{1}{x^2} \text{ ط} - \text{سس ط}$$

$$۹ - \text{سس ط} - \text{سس} \frac{1}{x} \text{ ط} \text{ سس ط}$$

$$۱۰ - \text{جب ط} (مم ط - مم \frac{1}{x} \text{ ط})$$

$$۱۱ - \frac{1}{x} \text{ جب ۲ ط} + (-۱) \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ جب ۱} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$۱۲ - \frac{1}{x} \text{ جب ۲ ط} - \frac{1}{x} \text{ جب ۱} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$۱۳ - \frac{1}{x} \text{ قم ط} (قط ۲ + ن ۱ ط - قط ۱ ط)$$

$$۱۴ - \text{جی} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ سس} \frac{1}{x} \text{ عہ} - ۲ \text{ سس عہ}$$

$$۱۵ - \frac{1}{x} = \{ ۳ \text{ جم ط} + (-\frac{1}{x}) - ۱ \text{ جم} \frac{1}{x} \text{ ط}$$

$$۱۶ - \frac{1}{x} = \{ ۲ \text{ جب} \frac{1}{x} - \text{جب ط} \}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۷- \frac{1}{x} &= \left\{ \frac{1}{x} \text{ س } \frac{1}{x} \text{ ط } - \text{سن ط} \right\} \\
 ۱۸- \frac{1}{x} &= \left\{ \frac{1}{x} \text{ م } \text{ ط } - \frac{1}{x} \text{ م } \frac{1}{x} \text{ ط} \right\} \\
 ۱۹- \text{ستا} &= \left\{ (۱+ن) (۱+ن) \right\} - \text{ستا} ۲ \\
 ۲۰- \text{ستا} &= (۱+ن) - \text{ستا} \text{ یعنی } \frac{ن}{ن+۱} \\
 ۲۱- \text{جی} &= \text{ستا} \frac{1}{x} - \text{ستا} \frac{1}{x} \text{ ج } = \frac{1}{x} \\
 ۲۲- \text{جی} &= \text{جی} ۱ - \text{جی} ۱ = \frac{1}{1+x} \text{ اور } \frac{1}{x} = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

۱۹ صفحہ ۱۶۷

$$\begin{aligned}
 ۱- ۱ &= ۱ - ۱ \text{ جم ط } + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ ط } - ۱ \text{ جم } ۳ \text{ ط } + \dots \text{ تالانہی} \\
 ۲- ۲ &= \text{جم ط } + ۱ \text{ جم } (ط + ن) + ۱ \text{ جم } (ط + ۲ن) + \dots \text{ تالانہی} \\
 ۳- ۳ &= \text{جب ط } + ۱ \text{ جب } (ط + ن) + ۱ \text{ جب } (ط + ۲ن) + \dots \text{ تالانہی} \\
 ۴- ۴ &= \text{جم ط } + ۱ \text{ جم } (ط + ن) + \frac{1}{2} \text{ جم } (ط + ۲ن) + \frac{1}{4} \text{ جم } (ط + ۳ن) + \dots \text{ تالانہی} \\
 ۵- ۵ &= \text{رط جب ن } + \frac{1}{2} \text{ رط جب } ۲ن + \frac{1}{4} \text{ رط جب } ۳ن + \dots \text{ تالانہی} \\
 ۶- ۶ &= \text{جہاں ر } = \text{ہا } ۱ + \text{جہاں ر } = \text{ستا} \frac{1}{x} \\
 ۹- ۹ &= \text{لا جم ع } - \frac{1}{x} \text{ لا جب } ۲ع - \frac{1}{x} \text{ لا جم } ۳ع + \frac{1}{x} \text{ لا جب } ۴ع \\
 &+ \frac{1}{x} \text{ لا جم } ۵ع - \dots \text{ تالانہی} \\
 ۱۰- ۱۰ &= \text{لا } ۱ - \text{لا } ۲ = \text{جم ع جب لا } - \frac{1}{x} \text{ جم ع جب } ۲لا - \frac{1}{x} \text{ جم ع جب } ۳لا \\
 &- \dots \text{ تالانہی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۱۲- ۱۲ &= \text{ستا} \frac{1}{x} - \text{ستا} \frac{1}{x} = \text{ستا} \frac{1}{x} \\
 &- \text{لوک } ۲ - \text{جب } ۲ط + \frac{1}{x} \text{ جم } ۳ط + \frac{1}{x} \text{ جب } ۴ط - \frac{1}{x} \text{ جم } ۵ط \\
 &- \frac{1}{x} \text{ جب } ۶ط + \dots \text{ تالانہی}
 \end{aligned}$$

$$۱۴- ۲ [جب ط - \frac{1}{4} جب ۳ ط + \frac{1}{8} جب ۵ ط - تا لائے باقی]$$

$$۱۵- ۲ [جم ط مس (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) جم ۲ ط مس (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) +]$$

$$+ ۲ کوک جم (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

۳۰ صفحہ ۱۸۴

$$۱- II [لا ۲ لاجم (۱+۳) + \frac{1}{4} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲$$

$$۲- II [لا ۲ لاجم (۱+۶) + \frac{1}{16} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳$$

$$۳- II [لا ۲ لاجم (۱+۶) + \frac{1}{16} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴$$

$$۴- II [لا ۲ لاجم (۱+۳) + \frac{1}{4} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵$$

$$۵- II [لا ۲ لاجم (۲+۶) + \frac{1}{16} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶$$

$$۶- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم \frac{1}{8} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲$$

$$۷- II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{1}{4} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲$$

$$۸- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم \frac{1}{8} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳$$

$$۹- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{1}{4} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴$$

$$۱۰- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم \frac{1}{8} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴$$

$$۱۱- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{1}{16} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶$$

$$۱۲- (لا ۱) II [لا ۲ لاجم \frac{1}{8} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲$$

$$۱۳- II [لا ۲ لاجم (۱+۲) + \frac{1}{16} + ۱] جہاں ر = ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ یا ۱۳ یا ۱۴ یا ۱۵ یا ۱۶ یا ۱۷ یا ۱۸ یا ۱۹ یا ۲۰$$

۲۹- دفعہ ۱۱ کی رقم میں لا کی بجائے رکھو اور پھر طرین کا لوکا تم کو
رکے لحاظ سے تفرق کرو اور پھر ط کے لحاظ سے مکمل کرو۔

۴۷- مس طه

$$۵۱- \frac{\text{جیب ۱}}{\text{جیب ۲}} \left[\frac{۱}{\text{جیب ۲}} - \frac{۱}{\text{جیب ۱}} \right] \text{جیب ۱} = \frac{۱}{\text{جیب ۲}}$$

$$۵۲- ۱ + \frac{۱}{۲} \text{جیب طه} + \frac{۳ \times ۱}{۲ \times ۲} \text{جیب طه} + \frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۶ \times ۴ \times ۲} \text{جیب طه} + \dots$$

$$۵۳- \frac{۲}{۳} - ۲ = ۶۰ - \frac{۱}{۶} \text{مم طه} - \text{مم طه}$$

$$۶۱- \frac{\text{جیب ۱}}{\text{جیب ۲}} (۱ + \text{جیب ۲}) = ۶۸ - ۲۵۸۴۰$$

$$۶۶- ۱۵۱۲۱ - ۵۶۱۹۱ = ۸۰ - ۵۶۸ - ۱۵۰ \dots ۱۵۱۴$$

$$۸۶- \frac{۱}{۲} \text{قم طه} = \left[\text{قطه ۲} (۲ + \text{ن ۲}) - \text{قطه ۲} \right]$$

$$۸۷- \frac{۱}{۳} = \left(\frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مس ۲ طه} - \text{مس ۳ طه} \right)$$

$$۸۸- \text{جیب ۳ طه} = \text{قم طه} - \text{قم ۲ طه} - \text{جیب ۳ طه} (۳ \times \text{ن ۲}) - \text{قم ۲ طه} - \text{قم ۳ طه}$$

$$۸۹- \text{جیب طه} = \left[\text{مم طه} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مم طه} \right]$$

$$۹۰- \text{مم طه} - \text{مم ۲ طه} = \frac{۱}{۲} - \left[\frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مس ۲ طه} - \text{مس ۳ طه} \right]$$

$$۹۲- \text{جیب ۱} = \text{قطه ۲} - \text{قطه ۱} = \frac{۱}{۲} - \left[\text{مم طه} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مم طه} \right]$$

$$۹۳- \text{قطه ۲} - \text{قطه ۱} = \frac{۱}{۲} - \left[\text{مم طه} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مم طه} \right]$$

$$۹۴- \text{مس ۱} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{مس ۲ طه} - \text{مس ۳ طه}$$

$$۹۹- \text{مس ۱} = \frac{\text{لا جیب طه}}{\text{لا جیب ۲ طه}} - \text{مس ۱}$$

$$۱۰۰- \frac{۱}{۲} \text{جیب طه} = \left[\text{منز طه} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{منز طه} \right]$$

$$۱۰۱- \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} - \frac{۱}{۱ + \text{ن ۲}} \text{منز طه} = \frac{۱}{۲} \text{منز طه}$$

$$\begin{aligned}
 102 - & \text{جب } ط \text{ جم (جب } ط \text{ مس } ط) - 1 \\
 108 - & \frac{1}{ط} + \frac{1}{ط} - \frac{1}{ط} [(2-ط) \text{ جم } ط - \frac{1}{ط} - \frac{1}{ط} \text{ جب } ط] \\
 110 - & \frac{ط}{1+ط}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 126 - & \text{مس } ط \text{ جب } ط \text{ جم } ط + \text{جب } ط \text{ جم } ط - \frac{ط}{ط} \text{ جہاں} \\
 & \text{جب } ط \text{ جم } ط - \text{جب } ط \text{ جم } ط \\
 & ط = ط \text{ جم } ط \text{ اور } ط = ط \text{ جب } ط
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 139 - & ط \text{ جم } ط - ط - \frac{1}{ط} - \frac{1}{ط} \\
 140 - & \frac{1}{ط} \text{ جم } ط (ط - 1) \text{ تا وقتیکہ } ط \text{ ن } ط \text{ کے برابر ہو} \\
 & \text{اس صورت میں حاصل جن جم } ط \text{ ہوگا اگر ن جفت ہو اور } - ط \\
 & \text{ہوگا اگر ن طاق ہو}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 141 - & \frac{1}{ط} \text{ جب } ط \text{ ن } ط \\
 & \frac{ط}{ط} = 1 - ط \text{ جب } ط \text{ (} \frac{1}{ط} + \frac{1}{ط} \text{)} \\
 & \frac{ط}{ط} = 1 - ط \text{ (} \frac{1}{ط} + \frac{1}{ط} \text{)} + 1
 \end{aligned}$$

دیکھو

فہرست اصطلاحات

Amplitude

Analytical Trigonometry

Analyse

Complex

Convergency

Circular function ()

Cubic equation

Co-efficient

Commensurable

Data

Double Valued function

e (exponent)

Exponential series

Expansion

Expand

Hyperbolic functions

Sinh, Cosh, etc

Index. Indices

Incommensurable

Imaginary (wholly, partly)

سعت
علم مثلث تحلیل
تحلیل کرو
ماتھ

استدقاق
تفاضل تفصیل مستدیرہ
مساوات درجہ سوم - کعبی

سر
متوافق
معطیات، مفروضات
دوقیمت والا تفاضل

نو
سلسلہ قوت نما

تفصیل
پھیلاؤ

زائدی یا ہدولی تفاضل -

ہدولی جیب - جبر جہز وغیرہ
قوت نما - قوت نماؤں

متباہ
خیالی - (کلا جزا)

Indeterminate

غیر معین

I

خ

Limiting value

انتہائی قیمت

Limit

انتہا - نہایت - غایت

Lt $(1 + \frac{1}{n})^n$
 $n = \infty$ نہایت $(1 + \frac{1}{n})^n$
 $n = \infty$ Limit when n becomes
infinitely greatانتہا جب n لا انتہا
بڑھ جاتا ہے

Logarithm to base e

لوکارتم اساس، نوپر

Log

لوگ

Many valued function

بہت سی قیمتوں والا تفاعل

Method of Induction

استقرا کا طریقہ

Multiple angle

ضعفی زاوے

Multiples of 2π

۲۲ کے اصناف

Modulus

مقیاس (مق)

Order of small quantities

مقادیر صغیر کا مرتبہ

Oscillating series

سلسلہ اہترازی

Operation

عمل

Operator

عامل

Principal value

قیمت خاص

Proportional Parts

اجزائے متناسبہ

Quadratic equation

مساوات درجہ دوم

Quadrature

رقبہ دریافت کرنا - تربیع کرنا

Resolve

تخلیل کرنا

Root

اصل

Value	قیمت
Single valued function	ایک قیمت والا
Solve	حل کرو
Theory	اصول نظریہ
Unreal	غیر حقیقی یا خیالی
Period (s) of function	ایک تفاعل کا دور (ادوار)
Calculus	احصاء
Differential calculus	احصاء تفرقات
Differential equations	تفرقی مساواتیں
Differential coefficient	تفرقی سر
Differential	تفرقی
Differentiation	تفرقہ
Differentiate	تفرق کرو
Integral Calculus	احصاء تکملات
Integral	تکمیل
Intogration	تکمل
Integrate	تکمل کرو

غلط

علم مثلث تحلیلی

صفحہ سطر	غلط	صحیح	صفحہ سطر	غلط	صحیح
۱۳ ۵	$= 1 + n$	$= 1 + n$	۳۴ ۳	$+ (1 - b) x$	$+ (1 - b) x$
۱۳ ۹	ماقبل کا سلسلہ	ماقبل کا سلسلہ	۸ ۴۶	$(n - 2)$	$(n - 2)$
۱ ۱۰	متراوت	معادل	۱۰ ۴۷	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
۲ ۱۰	قو	قو	۱۹ ۴۸	$x + \dots$	$x + \dots$
۹ ۱۸	یعنی می = ۱	یعنی انتہائی صورت	۸ ۵۴	$= \text{جم} طہ - عہ$	$= \text{جم} طہ - عہ$
۱۰ ۲۴	پس رقم مذکور	پس جملہ مذکور	۲ ۵۹	$\frac{طہ}{طہ} =$	$\frac{طہ}{طہ} =$
۱۳ ۳۰	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	۱۲ ۶۳	$= \frac{1}{3}$	$= \frac{1}{3}$
۱۱ ۳۲	شماثل	شماثل	۶ ۷۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۷ ۳۴	x جم جب	x جب جب	۱۸ ۷۸	x جب طہ	x جب طہ
۸ ۳۶	x جم لہ	x جب لہ	۶ ۸۲	اور	اور
۱۵ ۳۸	$(1 + x)$	$(1 + x)$	۱۴ ۸۴	جب طہ	جب طہ
۱۶ ۳۹	مرق	نکالا جائے	۸ ۸۹	سلسلہ ذیل میں	سلسلہ میں
۱۲ ۳۹	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$			
۱۵ ۴۰	جب $\frac{1}{100}$	جب $\frac{1}{100}$			

صفحہ سطر	غلط	صحیح	صفحہ سطر	غلط	صحیح
۸ ۹۲	$\frac{1-n}{1}$	$\frac{1-n}{2}$	۱۵ ۱۹۳	$\frac{2}{13} =$	$\frac{2}{23} =$
۲ ۱۰۹	$\frac{2}{13} +$	$\frac{2}{13} +$	۱۱ ۱۹۶	$\frac{2}{90} =$	$\frac{2}{90} =$
۱۳ ۱۱۷	$\sqrt{\frac{1}{1-1}}$	$\sqrt{\frac{1}{1-1}}$	۶ ۱۹۷	$\frac{2}{2} =$	$\frac{2}{2} =$
۱۰ ۱۳۲	$2n + \pi$	$2n + \pi$	۴ ۲۴۹	عہد مم طہ	عہد مم طہ
۳ ۱۳۵	$(\frac{2}{2} +$	$(\frac{2}{2} +$	۱ ۲۵۰	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
۱۲ ۱۳۷	ج' کو' خ' عہ	ج' کو' خ' عہ	۲ ۲۵۱	ثابت کرد کہ جم	ثابت کرد کہ جم
۶ ۱۵۰	$\frac{2}{2} = \neq$	$\frac{2}{2} \pm \neq$	۹ ۲۵۳	$2 + \pi$	$2 \pm \pi$
۱۰ ۱۵۷	منزل لا $\frac{1}{5}$	منزل لا $\frac{1}{5}$	۶ ۲۵۶	$\pi(1-2)$	$\pi(1-2)$
۱۶ ۱۶۹	$2(\frac{2}{2} + \frac{2}{2})$	$2(\frac{2}{2} + \frac{2}{2})$	۹ ۲۵۸	$1 + 6 + 8$	$1 + 6 + 8$
۴ ۱۷۶	$2 - 12$	$2 - 12$	۴ ۲۶۹	قط عہ	قط عہ
۱ ۱۷۷	ثابت کرد کہ	ثابت ہو کہ	۱۶ ۲۷۷	۲ جب عہ	۲ جب عہ
			۵ ۲۷۸	(جم بہ) جنر	(جم بہ) جنر

